

**ANALYSE LONGITUDINALE ET APPLICATION  
À UNE ÉTUDE SUR L'ÉCONOMIE MONDIALE**

par

Yannick Brochu

Mémoire présenté au département de mathématiques et d'informatique en vue de  
l'obtention du grade de maître ès sciences (M.Sc.)

FACULTÉ DES SCIENCES  
UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Sherbrooke, Québec, Canada, octobre 1999

Le 05/05/2000 , le jury suivant a accepté ce mémoire dans sa version finale.  
date

Président-rapporteur: M. Ernest Monga \_\_\_\_\_  
Département de mathématiques et d'informatique

Membre: M. Alain Boulanger \_\_\_\_\_  
Département de mathématiques et d'informatique

Membre: M. Bernard Colin \_\_\_\_\_  
Département de mathématiques et d'informatique

*À mes parents*

*La pratique sans la théorie est vide de sens*

*La théorie, quant à elle, prend tout son sens dans la pratique*



## SOMMAIRE

L'objectif poursuivi dans ce mémoire est de présenter une méthode d'analyse de données multidimensionnelles développée en s'inspirant de la méthode d'analyse factorielle d'opérateurs et qui en constitue une extension. On notera que cette méthode d'analyse ne se veut en aucun cas être une méthode alternative à STATIS mais plutôt une méthode complémentaire à cette dernière permettant d'accroître la quantité d'informations qu'il est possible d'extraire d'un ensemble de données multidimensionnelles.

Afin d'effectuer une présentation adéquate de cette méthode, trois chapitres seront nécessaires. Le premier chapitre présentera l'ensemble des outils mathématiques qui se trouvent à la base de l'analyse factorielle d'opérateurs. Nous y passerons en revue certains résultats sur les espaces de Hilbert, les opérateurs linéaires, le produit scalaire entre opérateurs pour finalement terminer avec la présentation des principaux opérateurs de l'analyse des données. Les concepts de base ayant été définis, le second chapitre abordera l'ensemble de la théorie entourant l'analyse factorielle d'opérateurs. Nous y décrirons les différentes phases de l'analyse complète d'une série de tableaux de données portant sur les mêmes individus ou les mêmes variables (interstructure, intrastructure et trajectoires) pour ensuite enchaîner avec une présentation détaillée du prolongement de l'analyse factorielle d'opérateurs que nous proposons. Enfin, puisqu'après les deux premiers chapitres nous aurons exposé essentiellement la théorie, nous terminerons ce mémoire avec un chapitre ayant un caractère beaucoup plus concret. Ainsi, le troisième chapitre sera consacré à la présentation de deux études de cas concernant l'évolution économique mondiale des trois dernières décennies. Cette étude nous permettra alors de mettre en application l'analyse factorielle d'opérateurs et l'extension de l'analyse factorielle d'opérateurs que nous proposons.

## REMERCIEMENTS

Par ces quelques lignes, je tiens à remercier toutes les personnes dont l'aide a permis à ce travail de voir le jour, de progresser et de se réaliser.

J'aimerais d'abord exprimer ma gratitude envers mon directeur de recherche, Monsieur Bernard Colin, professeur à la Faculté des sciences de l'Université de Sherbrooke. Dès le début de ma maîtrise, il a su me prodiguer de judicieux conseils et stimuler ma curiosité scientifique en me proposant le sujet de ce mémoire. Son indéniable compétence dans le domaine, la richesse de ses connaissances générales et son dynamisme entraînant ont sans cesse agrémenté chacune de nos rencontres.

Je tiens aussi à remercier Messieurs Ernest Monga et Alain Boulanger qui, malgré leurs multiples engagements et leur emploi du temps plutôt chargé, ont accepté d'être membres du jury de ce mémoire.

J'aimerais remercier le Fonds pour la formation de chercheurs et l'aide à la recherche (FCAR) pour la bourse qu'il m'a octroyée durant mes études de maîtrise.

Je me dois aussi de remercier mon collègue de maîtrise, Monsieur Jean-François Ruel, qui, malgré ses propres occupations, a toujours été disponible pour répondre à mes questions de nature économique pour ainsi améliorer la qualité de l'interprétation de mes résultats.

Je voudrais remercier, d'une façon toute spéciale, ma copine Maud qui a eu l'immense gentillesse de lire et corriger ce mémoire en plus de taper une partie de ce dernier. Je désire aussi la remercier pour toute la patience et la compréhension dont elle a fait preuve pendant toute la durée de mes études.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance envers mes parents pour le soutien moral et financier très précieux qu'ils m'ont apporté tout au long de mes études. Leur présence et leurs encouragements soutenus depuis mon tout jeune âge m'ont grandement aidé à atteindre chacun des objectifs que je m'étais fixés.

Enfin, je voudrais remercier tout le personnel enseignant et non-enseignant du département de mathématiques et d'informatique pour leur grande collaboration ainsi que toutes les autres personnes qui m'ont aidé de près ou de loin dans mon travail.

## TABLE DES MATIÈRES

<b>SOMMAIRE</b>	<b>iv</b>
<b>REMERCIEMENTS</b>	<b>v</b>
<b>TABLE DES MATIÈRES</b>	<b>vii</b>
<b>LISTE DES TABLEAUX</b>	<b>x</b>
<b>LISTE DES FIGURES</b>	<b>xi</b>
<b>INTRODUCTION</b>	<b>1</b>

### CHAPITRE 1

<b>LES OPÉRATEURS DE L'ANALYSE DES DONNÉES</b>	<b>5</b>
<b>1.1 Espaces de Hilbert</b>	<b>6</b>
<b>1.2 Opérateurs linéaires sur les espaces de Hilbert</b>	<b>10</b>
1.2.1 Définition d'un opérateur et propriétés générales	10
1.2.2 Valeurs propres, vecteurs propres et sous-espaces propres.	14
1.2.3 Spectre d'un opérateur	15
1.2.4 Opérateur de Hilbert-Schmidt	16
<b>1.3 Produit scalaire entre opérateurs</b>	<b>17</b>
1.3.1 Trace d'un opérateur	17
1.3.2 Produit scalaire de Hilbert-Schmidt	18
<b>1.4 Les projecteurs</b>	<b>20</b>
1.4.1 Définitions et propriétés générales	20
1.4.2 Théorème de décomposition spectrale d'un opérateur symétrique	21
1.4.3 Composition de deux projecteurs	22
<b>1.5. Les principaux opérateurs de l'analyse des données</b>	<b>23</b>
1.5.1 Les espaces de base de l'analyse des données	24
1.5.1.1 Représentation des individus dans $\mathbb{R}^p$	24

1.5.1.2 Représentation des variables dans $\mathbb{R}^{p^*}$	25
1.5.1.3 Représentation des variables dans $\mathbb{R}^n$	26
1.5.1.4 Schéma de dualité	28
1.5.2 Les opérateurs de l'analyse en composantes principales	30
1.5.2.1 Opérateur de covariance	31
1.5.2.2 Analyse en composantes principales et opérateurs de covariance	32
1.5.2.3 Opérateur de produit scalaire	34
1.5.2.4 Relation entre l'opérateur de covariance et l'opérateur de produit scalaire	37
1.5.3 Les opérateurs de l'analyse canonique	39
1.5.3.1 Aperçu de la démarche	40
1.5.3.2 Résolution mathématique	42
1.5.3.3 Métrique de Mahalanobis	45
1.5.4 Les opérateurs de l'analyse discriminante	46
1.5.5 Les opérateurs de l'analyse des correspondances	48

## CHAPITRE 2

### EXTENSION DE L'ANALYSE FACTORIELLE D'OPÉRATEURS 53

2.1 Analyse factorielle d'opérateurs	55
2.1.1 Interstructure – Opérateur caractéristique	55
2.1.2 Compromis	60
2.1.3 Intrastructure	63
2.1.3.1 Opérateurs de covariance	64
2.1.3.1.1 Compromis	65
2.1.3.1.2 Intrastructure	65
2.1.3.1.3 Composantes principales	67
2.1.3.2 Opérateurs de produit scalaire	68
2.1.3.2.1 Compromis	69
2.1.3.2.2 Intrastructure	70
2.1.4 Trajectoires	74
2.1.4.1 Généralités	76
2.1.4.2 Interprétation du sens de parcours d'une trajectoire	76
2.1.4.3 Individus supplémentaires	77

<b>2.2 Extension de l'analyse factorielle d'opérateurs</b>	<b>78</b>
2.2.1 Conceptualisation de la méthode	78
2.2.2 Formalisation théorique de la méthode	81
2.2.2.1 Description des objets	81
2.2.2.2 Première phase	81
2.2.2.3 Deuxième phase	82
 <b>CHAPITRE 3</b>	
 <b>ANALYSE COMPARATIVE DE L'ÉVOLUTION</b>	
<b>ÉCONOMIQUE DE CERTAINS PAYS À TRAVERS LE MONDE</b>	<b>87</b>
<b>3.1 Analyse comparative de la structure de l'économie de divers pays</b>	<b>87</b>
3.1.1 Présentation des données	88
3.1.2 Analyse de l'interstructure	117
3.1.2.1 Analyse de l'interstructure non centrée	118
3.1.2.2 Analyse de l'interstructure centrée	122
3.1.3 Analyse de l'intrastructure	127
3.1.3.1 Interprétation des axes de l'image euclidienne compromis	128
3.1.3.2 Représentation des positions-compromis des individus	133
3.1.4 Représentation des trajectoires	137
3.1.4.1 Représentation des trajectoires des pays	138
<b>3.2 Illustration de l'extension de l'analyse factorielle d'opérateurs</b>	
<b>à l'aide de données sur l'économie mondiale</b>	<b>144</b>
3.2.1 Présentation des données, variable qualitative de segmentation et matrices compromis résultantes	145
3.2.2 Analyse de l'interstructure	148
3.2.2.1 Analyse de l'interstructure non centrée	148
3.2.2.2 Analyse de l'interstructure centrée	152
 <b>CONCLUSION</b>	<b>155</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE</b>	<b>157</b>

## LISTE DES TABLEAUX

1 : Liste des pays sélectionnés	89
2 : Liste des variables sélectionnées	89
3 : Données initiales et statistiques élémentaires sur les variables à l'étude	91
4 : Matrice des coefficients RV	118
5 : Valeurs propres de l'interstructure non centrée	119
6 : Coordonnées des tableaux sur les axes principaux (non centrés) 1 et 2	119
7 : Coefficients de la combinaison linéaire caractérisant le compromis	120
8 : Qualité de la représentation selon les axes principaux (non centrés) 1 et 2	122
9 : Valeurs propres de l'interstructure centrée	122
10 : Coordonnées des tableaux sur les axes principaux (centrés) 1, 2 et 3	123
11 : Qualité de la représentation selon les axes principaux (centrés) 1, 2 et 3	126
12 : Valeurs propres de l'intrastructure	128
13 : Corrélations des variables avec les 3 premiers axes	129
14 : Contributions absolues, cosinus carrés et coordonnées des individus-compromis selon les axes 1, 2 et 3	133
15 : Coordonnées des points des trajectoires sur les axes 1 et 2	139
16 : Coordonnées des points des trajectoires sur les axes 1 et 3	141
17 : Matrices compromis résultant de la première phase de l'application de l'extension de l'analyse factorielle d'opérateurs	147
18 : Matrices des coefficients RV entre les continents	149
19 : Valeurs propres de l'interstructure non centrée de l'extension de l'analyse factorielle d'opérateurs	149
20 : Coordonnées des continents sur les axes principaux (non centrés) 1 et 2	150
21 : Coefficients de la combinaison linéaire caractérisant le compromis des compromis	150
22 : Qualité de la représentation des quatre continents selon les axes principaux (non centrés) 1 et 2	151
23 : Valeurs propres de l'interstructure centrée de l'extension de l'analyse factorielle d'opérateurs	152
24 : Coordonnées des continents sur les axes principaux (centrés) 1 et 2	152
25 : Qualité de la représentation des quatre continents selon les axes principaux (centrés) 1 et 2	154

## LISTE DES FIGURES

1 : Relation entre les espaces $\mathbb{R}^{p^*}$ et $\mathbb{R}^n$	27
2 : Relation entre les espaces $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^{p^*}$	29
3 : Schéma de dualité	30
4 : Concept de l'analyse factorielle d'opérateurs	53
5 : Structure des données dans l'extension de l'analyse factorielle d'opérateurs	79
6 : Représentation des 26 tableaux dans le plan des axes principaux (non centrés) 1 et 2	121
7 : Représentation des 26 tableaux dans le plan des axes principaux (centrés) 1 et 2	124
8 : Représentation des 26 tableaux dans le plan des axes principaux (centrés) 1 et 3	125
9 : Graphique des corrélations des variables avec les axes 1 et 2 du compromis	131
10 : Graphique des corrélations des variables avec les axes 1 et 3 du compromis	132
11 : Représentation des individus-compromis dans le plan des axes 1 et 2	136
12 : Représentation des individus-compromis dans le plan des axes 1 et 3	137
13 : Trajectoires de sept pays dans le plan factoriel 1 et 2	140
14 : Trajectoires de sept pays dans le plan factoriel 1 et 3	142
15 : Structure des données de l'illustration de l'extension de l'analyse factorielle d'opérateurs	146
16 : Représentation des quatre continents dans le plan des axes principaux (non centrés) 1 et 2	151
17 : Représentation des quatre continents dans le plan des axes principaux (centrés) 1 et 2	153



## INTRODUCTION

Depuis une trentaine d'années, les méthodes d'analyse de données multidimensionnelles ont largement démontré leur efficacité dans l'étude de grandes masses complexes d'information. Elles permettent d'obtenir des représentations graphiques qui constituent le meilleur résumé possible de l'information contenue dans de grands tableaux de données. Pour cela, le statisticien consent à une "perte" d'information afin de gagner en lisibilité. De données trop nombreuses pour être appréhendées directement, ces méthodes extraient les tendances les plus marquantes, les hiérarchisent, et éliminent les effets marginaux ou ponctuels qui perturbent la perception globale des faits.

Contrairement à une idée très répandue, les méthodes d'analyse des données ont été élaborées depuis fort longtemps. En fait, Karl Pearson, dans son article *On lines and planes of closest fit to systems of points in space* paru en 1901 dans le *Philosophical Magazine*, et Charles Spearman, dans son article *General intelligence, objectively determined and measured* paru en 1904 dans l'*American Journal of Psychology*, ont été les premiers à introduire les méthodes statistiques que l'on a réunies aujourd'hui sous l'appellation commune d'analyse factorielle.

Dans les années 1930, H. Hotelling en développant les travaux de K. Pearson a posé les premiers fondements de l'analyse en composantes principales dans son article *Analysis of a complex of statistical variables into principal components* paru en 1933 dans *Journal of Educational Psychology*. Par ailleurs, pour faire suite à l'article de S. Spearman, H. Hotelling développa dans son article *Relations between two set of variates* paru en 1936 dans *Biometrika*, les fondements d'une méthode qui engloba par la suite la plupart des méthodes d'analyse de données et qui en plus sera reconnue pour son intérêt théorique essentiel : l'analyse canonique.

Les années qui ont suivi ont été des années de perfectionnement et d'enrichissement des méthodes de diverses variantes tout en restant inabordables pour les praticiens à cause des nombreux calculs qu'elles nécessitaient.

L'apparition et surtout le développement des ordinateurs dans les années 1960 ont permis la vulgarisation et l'accessibilité des techniques d'analyse de données multidimensionnelles dans le traitement de grandes masses complexes d'information provenant de n'importe quel domaine. Le début d'une ère nouvelle en statistique venait d'être lancé. Depuis, ces méthodes n'ont cessé d'évoluer et le chercheur ou le praticien a augmenté sans arrêt l'arsenal de méthodes et de programmes lui permettant d'analyser d'importants volumes de données qui le laissaient jadis désarmé.

Notons cependant que ces techniques d'analyse des données ne permettaient de ne traiter qu'un seul tableau de mesure, de contingence ou de similarité à la fois. C'est vers les années soixante-dix et quatre-vingt qu'apparurent de nouvelles techniques permettant d'analyser conjointement plusieurs tableaux du même type.

C'est ainsi qu'a été introduite la double analyse en composantes principales en 1975 par J.M. Bouroche dans sa thèse qui s'intitulait *Analyse des données ternaires : la double analyse en composantes principales*. Par la suite, une seconde méthode surnommée STATIS a été introduite par Y. Escoufier et H. L'Hermier des Plantes en 1976. Elle a été exposée dans la thèse de H. L'Hermier des Plantes *Structuration des tableaux à trois indices de la statistique*. Cette méthode est aujourd'hui développée en détail dans le volume de C. Lavit *Analyse conjointe de tableaux quantitatifs* paru en 1988. Finalement, on ne peut passer sous silence l'analyse factorielle multiple introduite en 1982 par B. Escofier et J. Pagès et dont on peut obtenir une excellente description dans leur volume *Analyses factorielles simples et multiples : objectifs, méthodes et interprétation* paru en 1988.

Notons enfin qu'il existe d'autres méthodes d'analyse conjointe de plusieurs tableaux de données. Ainsi, les statisticiens anglo-saxons en ont développé plusieurs basées sur l'existence

d'un modèle sous-jacent aux tableaux de données. Parmi les plus connues, on retrouve INDSCAL, IDIOSCAL et PARAFAC. Pour un recensement complet des modèles existant, le lecteur peut consulter *Three-mode principal component analysis* écrit par P.M. KROONENBERG [9].

Maintenant que nous avons effectué un survol historique de l'analyse des données multidimensionnelles, notre attention se portera plus particulièrement sur la méthode d'analyse conjointe de tableaux quantitatifs introduite par Y. ESCOUFIER et H. L'HERMIER DES PLANTES et développée par C. LAVIT ([11] et [12]). En fait, l'objectif de ce mémoire est de présenter une nouvelle méthode statistique que nous avons développée à la suite d'une idée qui nous est venue à l'esprit en examinant la conception de la méthode STATIS. Cette nouvelle technique, que nous avons nommée "Extension de l'analyse factorielle d'opérateurs", se veut être une méthode complémentaire à la méthode STATIS. L'utilisation de cette nouvelle méthode nous permettra alors de découvrir de nouvelles facettes à l'ensemble de données considéré.

Afin de rendre la présentation de cette méthode plus accessible, nous allons consacrer le premier chapitre de ce mémoire à la présentation des outils mathématiques qui se trouvent à la base de l'analyse factorielle d'opérateurs. Ainsi, nous passerons en revue certains résultats sur les espaces de Hilbert, les opérateurs linéaires et sur le produit scalaire entre opérateurs. Nous terminerons ce premier chapitre en présentant les principaux opérateurs de l'analyse des données.

Les concepts de base étant définis, nous présenterons dans la première partie du second chapitre toute la théorie entourant l'analyse factorielle d'opérateurs. Ceci nous amènera alors à décrire les différentes phases de l'analyse complète d'une série de tableaux de données portant sur les mêmes individus ou les mêmes variables : l'analyse globale (interstructure), l'analyse détaillée des différents tableaux (intrastructure) et l'évolution des individus et des variables à travers chacun des tableaux (trajectoire). Une fois cette première partie terminée, nous aurons alors tous les outils nécessaires afin d'effectuer une présentation adéquate de l'extension de

l'analyse factorielle d'opérateurs que nous proposons. Cette présentation se déroulera en deux phases : la première phase nous permettra d'établir, sans trop de détails, le concept général de la méthode tandis que dans la seconde nous aborderons l'aspect théorique nécessaire à la formalisation de ce concept.

Finalement, puisqu'après les deux premiers chapitres nous aurons exposé essentiellement la théorie, il nous a semblé indispensable de terminer ce mémoire dans un contexte plus concret. Ainsi, nous consacrerons le dernier chapitre à la présentation de deux études de cas utilisant l'analyse factorielle d'opérateurs et l'extension de l'analyse factorielle d'opérateurs. Ces études de cas porteront sur l'analyse comparative de l'évolution économique, sur une période de 26 années, de quarante pays à travers le monde représentant à eux seuls un peu plus des quatre-cinquièmes de la production mondiale.

## CHAPITRE 1

### LES OPÉRATEURS DE L'ANALYSE DES DONNÉES

La statistique est un domaine possédant une immense diversité. Ainsi, selon la problématique à laquelle on désire s'attaquer, on privilégiera une partie de la statistique plutôt qu'une autre. C'est pour cette raison que la première étape à franchir est de cerner plus précisément la méthode statistique appropriée à l'objectif poursuivi ainsi qu'aux données disponibles.

En ce qui nous concerne, nous nous intéressons à des données économiques échelonnées sur plusieurs années. Il est alors judicieux d'opter pour les méthodes statistiques non-paramétriques. Ce choix nous semble naturel dans la mesure où il est délicat de supposer une quelconque loi régissant l'évolution des variables considérées. De plus, puisque nous considérons un grand nombre d'individus (pays) et de variables, l'approche exploratoire de l'analyse des données s'avère être la plus appropriée. En effet, l'objectif principal de l'analyse des données consiste à extraire, d'un ensemble souvent vaste d'observations et de variables, le maximum d'information afin de représenter et d'interpréter les données dans les espaces euclidiens de faibles dimensions.

Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction, plusieurs techniques d'analyse de données multidimensionnelles ont été introduites à travers le temps. On n'a qu'à penser à l'analyse canonique, l'analyse en composantes principales, l'analyse des correspondances ou encore l'analyse discriminante. Notons que, par la suite, nous supposons ces méthodes connues puisque notre objectif est d'approfondir une méthode d'analyse factorielle d'opérateurs qui est une extension de ces dernières.

Pour ce faire, nous nous devons de consacrer ce premier chapitre à la présentation des outils mathématiques qui se retrouvent à la base de l'analyse factorielle d'opérateurs. Ainsi, nous

débuterons ce dernier en définissant les notions d'espace de Hilbert, d'opérateurs linéaires et de produit scalaire entre opérateurs. Une section sera consacrée aux opérateurs de projection avant de mettre un terme à ce chapitre en développant les principaux opérateurs associés à chacune des méthodes classiques de l'analyse des données multidimensionnelles.

## 1.1 Espaces de Hilbert

Cette section est consacrée à l'introduction de la notion d'espace de Hilbert en se limitant essentiellement à l'énoncé des propriétés des applications linéaires entre ces espaces qui seront utiles par la suite. Certains auteurs préfèrent débiter avec la présentation des espaces euclidiens puisque dans la pratique les données sont toujours de dimension finie, mais ce choix demeure arbitraire lorsque l'on observe que tout espace euclidien est en fait un espace de Hilbert de dimension finie.

Soit  $E$  un espace vectoriel quelconque défini sur le corps des complexes  $\mathbb{C}$ . On appelle alors produit scalaire défini sur  $E \times E$  une forme hermitienne définie positive que l'on note de l'une des façons suivantes :

$$\forall (x, y) \in E \times E \quad \langle x, y \rangle \quad \text{ou} \quad x \cdot y$$

En d'autres termes un produit scalaire est une application  $\pi$  de  $E \times E$  dans  $\mathbb{C}$  qui fait correspondre au couple  $(x, y)$  de  $E \times E$  le nombre  $\langle x, y \rangle_\pi$  tel que  $\forall x, y \in E$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$  on a :

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle_\pi &= \overline{\langle y, x \rangle_\pi} && \text{symétrie} \\ &&& \text{où } \overline{\langle y, x \rangle_\pi} \text{ représente le conjugué de } \langle y, x \rangle_\pi \\ \left. \begin{aligned} \langle \lambda x, y \rangle_\pi &= \lambda \langle x, y \rangle_\pi \\ \langle x + z, y \rangle_\pi &= \langle x, y \rangle_\pi + \langle z, y \rangle_\pi \end{aligned} \right\} && \text{linéarité en } x \text{ et donc en } y \text{ par symétrie} \\ \left. \begin{aligned} \langle x, x \rangle_\pi &= 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ \langle x, x \rangle_\pi &\geq 0 \end{aligned} \right\} && \text{définie positive} \end{aligned}$$

Deux vecteurs  $x$  et  $y$  de  $E$  sont dits  $\pi$ -orthogonaux si leur produit scalaire est nul :  $\langle x, y \rangle_\pi = 0$ . Cette définition de l'orthogonalité nous permettra alors d'établir la notion d'indépendance linéaire entre vecteurs.

On appelle norme induite par le produit scalaire  $\pi$  l'application  $\| \cdot \|$  de  $E$  dans  $\mathbb{R}^+$  qui associe à tout vecteur  $x$  de  $E$  le nombre réel  $\|x\|_\pi^2 = \langle x, x \rangle_\pi$ . L'application  $\| \cdot \|$  est effectivement une norme puisqu'elle satisfait les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \|x\|_\pi &\geq 0 \\ \|x\|_\pi &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \\ \|\lambda x\|_\pi &= |\lambda| \|x\|_\pi \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \\ \|x + y\|_\pi &\leq \|x\|_\pi + \|y\|_\pi \end{aligned}$$

On dit qu'un espace vectoriel normé  $E$  est complet si toute suite de Cauchy dans  $E$  converge vers un élément  $x \in E$ . Ainsi, un espace vectoriel normé complet  $E$  dont la norme est déduite d'un produit scalaire est appelé un espace de Hilbert (ou un espace préhilbertien complet). On dit de plus qu'il est séparable s'il admet un sous-ensemble dénombrable dense dans  $E$ . Ce que nous supposons par la suite.

Par ailleurs, un ensemble fini ou dénombrable de vecteur  $(e_1, e_2, \dots)$  d'un espace de Hilbert  $E$  dans lequel deux vecteurs quelconques sont  $\pi$ -orthogonaux ( $\langle e_i, e_j \rangle_\pi = 0 \quad \forall i \neq j$ ) est appelé un système  $\pi$ -orthogonal. Si de plus chaque vecteur du système est de norme unité, on dit alors que le système est  $\pi$ -orthonormé.

Soient  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$   $n$  vecteurs  $\pi$ -orthogonaux deux à deux formant une base de  $E$  ( $E$  de dimension finie), alors cette base est dite  $\pi$ -orthogonale. Si, de plus, chaque vecteur  $e_i$  est de norme 1, la base  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  est dite  $\pi$ -orthonormée. Tout espace de Hilbert de dimension

finie possède une base orthonormée et par rapport à cette base, tout vecteur  $x$  s'écrit sous la forme suivante :

$$x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle_{\pi} e_i$$

Voici maintenant quelques identités bien connues qui s'avéreront très utiles dans la suite de cet exposé. Soient  $x$  et  $y$  deux éléments d'un espace de Hilbert  $E$ , on a :

Inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|\langle x, y \rangle_{\pi}| \leq \|x\|_{\pi} \|y\|_{\pi}$$

Inégalité du triangle (ou théorème de Minkowski)

$$\|x + y\|_{\pi} \leq \|x\|_{\pi} + \|y\|_{\pi}$$

Théorème de Pythagore

$$x \text{ et } y \text{ sont } \pi\text{-orthogonaux} \Leftrightarrow \|x + y\|_{\pi}^2 = \|x\|_{\pi}^2 + \|y\|_{\pi}^2$$

Inégalité de Bessel

Soit  $x$  un vecteur de l'espace de Hilbert  $E$  de dimension finie ou infinie. Les composantes  $\langle x, e_i \rangle_{\pi}$  de  $x$  sur un système orthonormé  $S$  de  $k$  vecteurs  $(e_1, e_2, \dots, e_k)$ ,  $k$  inférieur ou égal à la dimension de  $E$ , vérifient l'inégalité suivante :

$$\sum_{i=1}^k |\langle x, e_i \rangle_{\pi}|^2 \leq \|x\|_{\pi}^2$$

Identité de Parseval

Soit  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  une base orthonormée de  $E$  de dimension finie  $n$ , alors pour tout  $x$  et  $y$  appartenant à  $E$  on a :

$$\langle x, y \rangle_{\pi} = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle_{\pi} \langle y, e_i \rangle_{\pi}$$



Les démonstrations de ces résultats se trouvent dans de nombreux ouvrages dont ceux de HALMOS [7] et RIESZ [14].

À tout espace vectoriel  $E$  muni d'un produit scalaire  $\pi$  on peut associer un espace vectoriel dual  $E^*$  qui est l'ensemble des applications linéaires de  $E$  dans  $\mathbb{R}$ , appelées formes linéaires définies sur  $E$  :  $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ . On note  $\langle x, u \rangle_E$  la valeur de la forme linéaire  $u$  de  $E^*$  appliquée au vecteur  $x$  de  $E$ . D'autre part, on sait que lorsque  $E$  est de dimension finie,  $E^*$  a la même dimension que  $E$ . Ainsi, à toute base  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  de  $E$  on peut associer une base  $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$  de  $E^*$ , appelée base duale de  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ , de la manière suivante :

$$\begin{array}{l} \forall i = 1, 2, \dots, n \\ \forall j = 1, 2, \dots, n \end{array} \quad \text{on a} \quad \langle e_i, e_j^* \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Puisque  $E$  est un espace de Hilbert, le produit scalaire  $\pi$  permet de définir un isomorphisme canonique entre  $E$  et son dual  $E^*$ . En effet, il suffit d'associer au produit scalaire  $\pi$  l'application linéaire  $\pi_u$  qui fait correspondre à un vecteur quelconque  $y$  de  $E$  le scalaire  $\pi_u(y)$  défini par :

$$\forall y \in E \quad \pi_u(y) = \langle u, y \rangle_\pi$$

On montre alors que  $\pi_u$  est un isomorphisme de  $E$  sur  $E^*$ .

Dans la suite de cet exposé on portera notre attention plus particulièrement sur l'espace de Hilbert  $L^2(\Omega, \tau, \mu)$  où  $\Omega$  désigne un ensemble quelconque,  $\tau$  une  $\sigma$ -algèbre de parties de  $\Omega$  et  $\mu$  une mesure de probabilité sur  $\tau$ .  $L^2(\Omega, \tau, \mu)$  est en fait l'espace des fonctions complexes mesurables  $f$  sur  $\Omega$ ,  $\mu$ -égales presque partout et de carré intégrable (c'est-à-dire  $\int_\Omega |f(\omega)|^2 d\mu(\omega) < +\infty$ ). L'espace  $L^2(\Omega, \tau, \mu)$  est ainsi l'espace des classes d'équivalence pour la relation "égalité  $\mu$ -presque partout" (c'est-à-dire qu'une fonction  $f$  est égale à une fonction  $g$  en tous points excepté sur un ensemble de  $\mu$ -mesure nulle). Afin de simplifier la notation on

utilisera  $L^2(\Omega)$  pour représenter  $L^2(\Omega, \tau, \mu)$ . Finalement, on munira  $L^2(\Omega)$  d'un produit scalaire, à valeur dans le corps  $\mathbb{C}$  des nombres complexes, que l'on définit par :

$$\langle x, y \rangle = \int_{\Omega} x(\omega) \overline{y(\omega)} d\mu(\omega) \quad \begin{array}{l} \forall x \in L^2(\Omega) \\ \forall y \in L^2(\Omega) \end{array}$$

où  $\overline{y(\omega)}$  représente le conjugué de  $y(\omega)$ .

## 1.2 Opérateurs linéaires sur les espaces de Hilbert

La section précédente nous a permis d'introduire la notion d'espace de Hilbert. Nous présentons maintenant l'un des principaux outils utilisé dans ce mémoire : les opérateurs linéaires. ( En effet, tout au long de ce texte nous utiliserons l'appellation d'opérateur pour définir certains objets.) Ainsi, afin de familiariser le lecteur à cette notion, nous allons consacrer une première sous-section à la définition d'un opérateur ainsi qu'aux propriétés générales qui en découlent. Les sous-sections présenteront la théorie concernant les valeurs propres, les vecteurs propres, les sous-espaces propres, le spectre d'un opérateur et finalement, la théorie entourant les opérateurs d'Hilbert-Schmidt.

### 1.2.1 Définition d'un opérateur et propriétés générales

Cette section a pour objectif la définition des principaux types d'opérateurs utilisés dans ce mémoire ainsi que l'énoncé des différents théorèmes et propriétés rattachés à chacun d'eux.

#### *Définition 1.1 (Opérateur)*

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces de Hilbert. On dit que l'application  $T$  est un opérateur de  $E$  dans  $F$  si  $T$  est une application linéaire et continue de  $E$  dans  $F$ . De plus, on définit la norme de l'opérateur  $T$  de la façon suivante :

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\|$$

Dans la suite de ce mémoire on notera  $\mathcal{L}(E)$  l'ensemble des opérateurs définis sur l'espace de Hilbert  $E$  dans lui-même.

### Théorème 1.1

Soient  $E$  un espace de Hilbert et deux opérateurs  $S$  et  $T$  de  $\mathcal{L}(E)$ . Si pour tout vecteur  $x$  et pour tout nombre complexe  $\alpha$  on pose  $(\alpha T)(x) = \alpha T(x)$ ,  $(S+T)(x) = S(x) + T(x)$  et  $(S \circ T)(x) = S(T(x))$ , alors  $\alpha T$ ,  $S+T$  et  $S \circ T$  sont des opérateurs de  $\mathcal{L}(E)$  tels que

$$\begin{aligned}\|\alpha T\| &= |\alpha| \|T\| \\ \|S + T\| &\leq \|S\| + \|T\| \\ \|S \circ T\| &\leq \|S\| \cdot \|T\|\end{aligned}$$

Le lecteur pourra se référer à SCHWARTZ [16] pour la démonstration de ces résultats.

### *Définition 1.2 (Opérateur adjoint)*

Soit  $T$  un opérateur d'un espace de Hilbert  $E$  de dimension finie dans lui-même. Un opérateur  $T^*$  satisfaisant :

$$\langle u, T(v) \rangle = \langle T^*(u), v \rangle \quad \forall u \in E \quad \text{et} \quad \forall v \in E$$

est dit adjoint de  $T$ .

Le théorème qui suit prend alors tout son sens en assurant l'existence d'un  $T^*$  unique.

### Théorème 1.2

Si  $T$  est un opérateur d'un espace de Hilbert  $E$  de dimension finie dans lui-même, alors il existe un unique opérateur adjoint  $T^*$  défini sur  $E$ .

Le lecteur peut consulter D.P. LACHAT [10] pour la démonstration de ce théorème.

Puisque la notion d'opérateur adjoint conduit à celle d'opérateur symétrique (il fera l'objet de notre prochaine définition) et qu'elle est utilisée pour définir un produit scalaire sur  $\mathcal{L}(E)$ , on énoncera, sans démonstration, quelques propriétés concernant les opérateurs adjoints.

Considérons deux opérateurs dans un espace de Hilbert  $E$  de dimension finie ainsi qu'un scalaire  $\alpha$ . On obtient alors les propriétés suivantes :

- a)  $(S + T)^* = S^* + T^*$
- b)  $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^* \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$
- c)  $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$
- d)  $(T^*)^* = T$

*Définition 1.3 (Opérateur symétrique)*

Soit  $T$  un opérateur défini sur un espace de Hilbert  $E$  de dimension finie. On dit que  $T$  est un opérateur auto-adjoint ou symétrique dans le cas réel lorsque :  $T = T^*$

*Définition 1.4 (Opérateur inversible)*

Soit  $T$  un opérateur défini sur un espace de Hilbert  $E$  de dimension finie. On dit que  $T$  est un opérateur inversible s'il existe un opérateur  $S$  (aussi noté  $T^{-1}$ ) de  $\mathcal{L}(E)$  tel que :

$$T \circ S = S \circ T = I$$

*Définition 1.5 (Opérateur orthogonal)*

Soit  $T$  un opérateur défini sur un espace de Hilbert  $E$  de dimension finie. On dit que  $T$  est un opérateur orthogonal lorsque :

$$\langle T(u), T(v) \rangle = \langle u, v \rangle \quad \forall u \in E \quad \text{et} \quad \forall v \in E$$

Autrement dit, un opérateur orthogonal conserve le produit scalaire. De façon équivalente, on dit que  $T$  est un opérateur orthogonal lorsque :  $T^* = T^{-1}$

### Théorème 1.3

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur soit orthogonal est que les images des vecteurs d'une base orthonormée de  $E$  constituent une base orthonormée de  $E$ .

Démonstration :

La condition est évidemment nécessaire.

Si  $(u_j)_{j=1,2,\dots,p}$  est une base orthonormée,  $(T(u_j))_{j=1,2,\dots,p}$  l'est également puisque  $\forall i=1,2,\dots,p$  et  $\forall j=1,2,\dots,p$  on a :

$$\langle T(u_i), T(u_j) \rangle = \langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij}$$

Réciproquement, soient  $u$  et  $v$  deux vecteurs de  $E$ . On a :

$$u = \sum_{j=1}^p \alpha_j u_j \quad \text{et} \quad v = \sum_{j=1}^p \beta_j u_j$$

où  $(u_j)_{j=1,2,\dots,p}$  et  $(T(u_j))_{j=1,2,\dots,p}$  sont des bases orthonormées.

Alors on peut écrire

$$\langle T(u), T(v) \rangle = \sum_{j=1}^p \alpha_j \beta_j = \langle u, v \rangle$$

Donc l'opérateur  $T$  est orthogonal.

□

Notons par ailleurs qu'un opérateur  $T$  orthogonal possède la propriété de préserver les longueurs et les angles, c'est-à-dire :

$$\|T(x)\| = \|x\| \quad \forall x \in E$$

et

$$\cos(T(x), T(y)) = \frac{\langle T(x), T(y) \rangle}{\|T(x)\| \|T(y)\|} = \cos(x, y)$$

*Définition 1.6 (opérateur positif)*

Soit  $T$  un opérateur défini sur un espace de Hilbert  $E$  de dimension finie. On dit que  $T$  est un opérateur positif lorsque :  $\langle T(u), u \rangle \geq 0 \quad \forall u \in E$

**1.2.2 Valeurs propres, vecteurs propres et sous-espaces propres.**

*Définition 1.7*

Soit  $T$  un opérateur d'un espace de Hilbert dans lui-même (c'est-à-dire  $T \in \mathcal{L}(E)$ ). On dit que  $\lambda \in \mathbb{C}$  est une valeur propre de  $T$  s'il existe un vecteur non nul  $u \in E$ , appelé vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda$ , tel que  $T(u) = \lambda u$ .

Théorème 1.4

Un opérateur symétrique défini sur un espace euclidien de dimension finie  $p$  possède  $p$  valeurs propres réelles qui peuvent être distinctes ou non et  $p$  vecteurs propres orthogonaux deux à deux.

Le lecteur trouvera une démonstration de ce théorème dans M. QUEYSANNE [13].

*Définition 1.8*

L'ensemble des vecteurs propres associés à la même valeur propre  $\lambda$ , forme un sous-espace vectoriel de  $E$ , appelé sous-espace propre, que l'on note de la façon suivante :

$$E_{\lambda}(T) = \ker(T - \lambda I) = \{x \in E | T(x) = \lambda x\}$$

où  $\ker(T - \lambda I)$  représente le noyau de  $T - \lambda I$

Voici maintenant les énoncés de quelques propriétés d'un opérateur  $T \in \mathcal{L}(E)$  concernant les valeurs propres, vecteurs propres et sous-espaces propres qui en découlent.

- Les valeurs propres d'un opérateur  $T$  sont les racines du polynôme caractéristique  $P_T(\lambda) = \det(T - \lambda I)$ .
- Deux vecteurs propres associés à deux valeurs propres distinctes d'un opérateur  $T$  sont linéairement indépendants. De plus, deux vecteurs propres indépendants peuvent être associés à la même valeur propre multiple.
- Les valeurs propres d'un opérateur orthogonal sont nécessairement égales à  $\pm 1$ .
- Les valeurs propres d'un opérateur symétrique positif sont toutes positives ou nulles.
- Soit  $T$  un opérateur auto-adjoint ou symétrique dans le cas réel, alors les valeurs propres sont toutes réelles.
- Si on considère un opérateur  $T$  auto-adjoint ou orthogonal ainsi que deux vecteurs propres  $u_1, u_2$  associés à deux valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2$  distinctes, alors les vecteurs propres  $u_1$  et  $u_2$  sont orthogonaux.
- Soit une suite de  $p$  sous-espaces propres  $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}, \dots, E_{\lambda_p}$  associés à  $p$  valeurs propres non nulles distinctes  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ , alors les sous-espaces propres  $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}, \dots, E_{\lambda_p}$  sont orthogonaux et la somme des dimensions de ces sous-espaces propres est égale à la dimension de  $E$ .
- Un opérateur auto-adjoint est diagonalisable, c'est-à-dire qu'il existe une base orthonormée de vecteurs propres.

### 1.2.3 Spectre d'un opérateur

#### *Définition 1.9*

Soit  $T$  un opérateur auto-adjoint défini sur un espace de Hilbert  $E$ . On appelle spectre de  $T$  noté  $\Sigma(T)$  ou  $S_p(T)$ , l'ensemble des valeurs  $\lambda$  telles que  $T - \lambda I$  ne soit pas inversible.

On note que, dans le cas fini, le spectre n'est autre que l'ensemble des valeurs propres. Par contre, dans le cas infini, il se peut que le spectre contienne des éléments autre que les valeurs propres.

### 1.2.4 Opérateur de Hilbert-Schmidt

#### Théorème 1.6

Soit  $T$  un opérateur d'un espace de Hilbert  $E$  de dimension finie dans lui-même (c'est-à-dire  $T \in \mathcal{L}(E)$ ) et soit  $(e_1, e_2, \dots, e_p)$  une base orthonormée de  $E$ . La quantité suivante :

$$\sum_{i=1}^p \|T(e_i)\|^2$$

est alors indépendante de la base orthonormée choisie et ne dépend que de  $T$ .

Démonstration :

Soit  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_p)$  une autre base hilbertienne.

En vertu de l'égalité de Parseval il vient :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p \|T(e_i)\|^2 &= \sum_{i=1}^p \left( \sum_{j=1}^p |\langle T(e_i), \varepsilon_j \rangle|^2 \right) \\ &= \sum_{j=1}^p \left( \sum_{i=1}^p |\langle e_i, T^*(\varepsilon_j) \rangle|^2 \right) \\ &= \sum_{j=1}^p \|T^*(\varepsilon_j)\|^2 \quad \forall (e_i)_{i=1,2,\dots,p} \quad \text{et} \quad \forall (\varepsilon_j)_{j=1,2,\dots,p} \end{aligned}$$

Ainsi le théorème est vérifié puisque cette égalité ne dépend pas des bases choisies.

□

Un opérateur  $T$  est dit de Hilbert-Schmidt si  $\sum_{i \in I} \|T(e_i)\|^2 < \infty$ . On appelle alors norme de Hilbert-Schmidt de  $T$ , que l'on désigne par  $\|\cdot\|_{H.S.}$  l'expression :

$$\left( \sum_{i \in I} \|T(e_i)\|^2 \right)^{1/2}.$$

Les opérateurs de Hilbert-Schmidt de  $E$  dans lui-même, que l'on note  $L_2(E)$ , forment ainsi un espace vectoriel normé complet. Autrement dit, un espace de Banach. Le lecteur peut trouver la démonstration de ce dernier résultat dans SCHWARTZ [13].



## 1.3 Produit scalaire entre opérateurs

L'objectif de cette section est de définir le produit scalaire de Hilbert-Schmidt entre opérateurs ainsi que les propriétés qui en découlent. On présentera d'abord la notion de trace d'un opérateur ainsi que certaines de ses propriétés. Par la suite on introduira la notion de produit scalaire défini sur l'espace des opérateurs symétriques. Cet intérêt vient du fait que ce produit scalaire est à l'origine de la plupart des méthodes d'analyse d'opérateurs.

### 1.3.1 Trace d'un opérateur

#### *Définition 1.10*

Considérons un opérateur  $T \in \mathcal{L}(E)$ . Soit  $(e_1, e_2, \dots, e_p)$  une base de  $E$  et désignons par  $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_p^*)$  la base duale correspondante dans  $E^*$ . La trace de l'opérateur  $T$  est, par définition, le nombre suivant :

$$tr(T) = \sum_{i=1}^p \langle T(e_i), e_i^* \rangle$$

La trace de l'opérateur ne dépend pas de la base dans laquelle les vecteurs sont représentés. En effet, soient  $(e_1, e_2, \dots, e_p)$  et  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_p)$  deux bases quelconques de  $E$ . On a :

$$\begin{aligned} tr(T) &= \sum_{i=1}^p \langle T(e_i), e_i^* \rangle \\ &= \sum_{i=1}^p \left\langle T \left( \sum_{j=1}^p \langle e_i, \varepsilon_j^* \rangle \varepsilon_j \right), e_i^* \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \langle e_i, \varepsilon_j^* \rangle \langle T(\varepsilon_j), e_i^* \rangle \\ &= \sum_{j=1}^p \left\langle T(\varepsilon_j), \sum_{i=1}^p \langle e_i, \varepsilon_j^* \rangle e_i^* \right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^p \langle T(\varepsilon_j), \varepsilon_j^* \rangle \quad \text{puisque } \langle e_i, \varepsilon_j^* \rangle \text{ est la coordonnée de } \varepsilon_j^* \text{ sur } e_i^*. \end{aligned}$$

Voici maintenant quelques propriétés élémentaires de la trace énoncées sans démonstration.

Soient  $S$  et  $T$  deux opérateurs de  $\mathcal{L}(E)$  et  $\lambda$  un scalaire quelconque.

- $\text{tr}(S+T) = \text{tr}(S) + \text{tr}(T)$
- $\text{tr}(\lambda T) = \lambda \text{tr}(T)$
- $\text{tr}(T) = \text{tr}(T^*)$

Si  $S \in \mathcal{L}(E, F)$  et si  $T \in \mathcal{L}(F, E)$  alors  $S \circ T \in \mathcal{L}(F, F)$  et  $T \circ S \in \mathcal{L}(E, E)$  et on a

- $\text{tr}(S \circ T) = \text{tr}(T \circ S)$

Le lecteur peut consulter C. LAVIT [11] pour la démonstration de ces propriétés.

### 1.3.2 Produit scalaire de Hilbert-Schmidt

#### *Définition 1.11*

Soient  $S$  et  $T$  deux opérateurs définis sur un espace de Hilbert de dimension  $p$  et soit  $(e_1, e_2, \dots, e_p)$  une base orthonormée quelconque. Le produit scalaire de Hilbert-Schmidt entre  $S$  et  $T$  est défini par l'expression suivante :

$$\langle S, T \rangle_{H.S.} = \sum_{j=1}^p \langle S(e_j), T(e_j) \rangle$$

En utilisant les propriétés des opérateurs adjoints on peut réécrire le produit scalaire de Hilbert-Schmidt de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \langle S, T \rangle_{H.S.} &= \sum_{j=1}^p \langle e_j, (S^* \circ T)(e_j) \rangle \\ &= \sum_{j=1}^p \langle (T^* \circ S)(e_j), e_j \rangle \end{aligned}$$

Le coefficient  $\langle (T^* \circ S)(e_j), e_j \rangle$  représente la  $j^{\text{e}}$  coordonnée de  $(T^* \circ S)(e_j)$  dans la base  $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ . Par définition, la somme de ces coefficients est la trace de  $T^* \circ S$ . Dans le cas où les opérateurs  $S$  et  $T$  sont symétriques, il est aisé de voir que l'expression de leur produit scalaire n'est autre que la trace de  $T \circ S$  (ou de  $S \circ T$ ). D'où l'énoncé suivant :

#### Théorème 1.7

Considérons deux opérateurs  $S$  et  $T$  dans l'espace des opérateurs symétriques de  $E$ . Le produit scalaire de Hilbert-Schmidt est alors égal à la trace du produit de composition :

$$\langle S, T \rangle_{H.S.} = \text{tr}(S \circ T) = \text{tr}(T \circ S)$$

On peut également exprimer le produit scalaire en fonction du spectre des opérateurs. En effet, la considération des bases orthonormées de  $E$   $(u_1, u_2, \dots, u_p)$  et  $(v_1, v_2, \dots, v_p)$  constituées des vecteurs propres de  $S$  et  $T$  associés aux valeurs propres  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$  et  $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p)$  permet d'écrire :

$$\langle S, T \rangle_{H.S.} = \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^p \lambda_j \mu_k \langle u_j, v_k \rangle^2$$

Par ailleurs, pour faire suite à la section 2.4 ainsi qu'au théorème précédent, la norme de Hilbert-Schmidt d'un opérateur symétrique est égale à :

$$\|T\|_{H.S.}^2 = \sum_{i=1}^p \lambda_i^2$$

Enfin, la propriété suivante est particulière aux opérateurs symétriques positifs.

#### Théorème 1.8

Si  $S$  et  $T$  sont deux opérateurs symétriques positifs de  $E$ , alors leur produit scalaire est positif ou nul.

Démonstration :

La démonstration est évidente lorsque l'on considère l'expression du produit scalaire des opérateurs  $S$  et  $T$  en fonction de leur spectre. Ainsi on a :

$$\langle S, T \rangle_{H.S.} = \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^p \lambda_j \mu_k \langle u_j, v_k \rangle^2$$

Étant donné que les valeurs propres  $\lambda_j$   $j=1,2,\dots,p$  et  $\mu_k$   $k=1,2,\dots,p$  sont positives ou nulles, il s'ensuit que le produit scalaire des opérateurs S et T est également positif ou nul.

□

En terminant, notons que l'on doit porter une attention particulière au fait que la trace du produit de composition ne définit le produit scalaire de Hilbert-Schmidt que dans l'espace des opérateurs symétriques (ce qui est supposé dans le cadre de ce mémoire).

## 1.4 Les projecteurs

Nous consacrons cette quatrième section à l'étude d'une classe particulière d'opérateurs symétriques : les projecteurs. L'importance des projecteurs vient du fait qu'ils sont très fréquemment utilisés en analyse des données. Ainsi, nous nous proposons dans cette section d'établir leurs principales propriétés, d'exposer le théorème de décomposition spectrale qui en découle et de terminer avec la présentation de certains théorèmes concernant la composition de deux projecteurs.

### 1.4.1 Définitions et propriétés générales

#### *Définition 1.12*

Soit E un espace de Hilbert. On dit que P est un projecteur de  $\mathcal{L}(E)$  si P est un opérateur symétrique positif et idempotent ( $P^2=P$ ). Un projecteur est donc un opérateur de projection orthogonale.

Considérons un espace E de dimension p ainsi qu'un projecteur P de rang r ( $\dim(\text{Im } P) = r$ ). Dans ce cas un projecteur P possède r valeurs propres égales à 1 et p - r valeurs propres égales à 0. Ainsi,

$$\forall u \in \text{Im } P \quad \text{on a} \quad P(u) = u$$

$$\forall v \in \text{Ker } P \quad \text{on a} \quad P(v) = 0$$

Donc  $\text{Ker } P = (\text{Im } P)^\perp$  où  $(\text{Im } P)^\perp$  représente le sous-espace orthogonal à  $\text{Im } P$ . Cette dernière propriété entraîne évidemment que :  $E = \text{Im } P \oplus \text{Ker } P$ . Puisqu'il n'existe pas d'autre valeur propre, on en déduit que la norme de Hilbert-Schmidt du projecteur  $P$  est :

$$\|P\|_{H.S.} = \sqrt{r}$$

### 1.4.2 Théorème de décomposition spectrale d'un opérateur symétrique

#### Théorème 1.5

Soit  $T$  un opérateur symétrique de  $E$ . Désignons par  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p$  ses valeurs propres ordonnées (distinctes ou non) et soit  $(e_1, e_2, \dots, e_p)$  une base orthonormée de vecteurs propres associés. Soit  $\lambda_i$  la valeur propre associée à  $e_i$  et soit  $P_i$  le projecteur sur la droite vectorielle engendrée par  $e_i$ . Alors si  $p$  est le rang de l'opérateur  $T$ , ce dernier admet la décomposition spectrale suivante :

$$\forall x \in E \quad T = \sum_{i=1}^p \lambda_i P_i \quad \text{où} \quad P_i(x) = \langle x, e_i \rangle e_i$$

Démonstration :

Soit  $x$  un vecteur quelconque de  $E$ .

On peut décomposer ce vecteur dans la base  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  afin d'obtenir :

$$\begin{aligned} T(x) &= T\left(\sum_{i=1}^p \langle x, e_i \rangle e_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^p \langle x, e_i \rangle T(e_i) \\ &= \sum_{i=1}^p \langle x, e_i \rangle \lambda_i e_i \\ &= \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle x, e_i \rangle e_i \end{aligned}$$

puisque le nombre de valeurs propres non nulles est égal au rang de l'opérateur.

Le vecteur  $\langle x, e_i \rangle e_i$  étant l'image du vecteur  $x$  par  $P_i$ , on en déduit la relation énoncée.

□

### 1.4.3 Composition de deux projecteurs

L'établissement de certains résultats concernant la composition de deux projecteurs nous permettra par la suite de résoudre le problème posé par l'analyse canonique ainsi que par les méthodes qui en découlent : par exemple l'analyse des correspondances et l'analyse discriminante. Considérons  $P_F$  et  $P_G$  les projecteurs sur deux sous-espaces  $F$  et  $G$  ainsi que les compositions de ces deux projecteurs :  $P_F \circ P_G$  et  $P_G \circ P_F$ .

#### Théorème 1.10

Les vecteurs propres associés aux valeurs propres non nulles de  $P_F \circ P_G$  appartiennent à  $F$  et la restriction de  $P_F \circ P_G$  à  $F$  est symétrique.

Démonstration :

En effet on a :

- $(P_F \circ P_G)(x) = \lambda x \quad \Rightarrow \quad x \in F \quad \text{puisque } \lambda \neq 0$

- $\forall x \in F \text{ et } \forall y \in F$

$$\begin{aligned} \langle (P_F \circ P_G)(x), y \rangle &= \langle P_G(x), P_F(y) \rangle && \text{puisque } P_F \text{ est symétrique} \\ &= \langle P_G(x), y \rangle && \text{puisque } y \in F \\ &= \langle x, P_G(y) \rangle && \text{puisque } P_G \text{ est symétrique} \\ &= \langle P_F(x), P_G(y) \rangle && \text{puisque } x \in F \\ &= \langle x, (P_F \circ P_G)(y) \rangle && \text{puisque } P_F \text{ est symétrique} \end{aligned}$$

La même démonstration est valide pour l'opérateur  $P_G \circ P_F$ .

□

### Théorème 1.11

Les valeurs propres non nulles de  $P_F \circ P_G$  et de  $P_G \circ P_F$  sont égales et les vecteurs propres correspondants se déduisent l'un de l'autre par projection.

Démonstration :

Soient  $\lambda \neq 0$  et  $x \in F$  tels que :

$$(P_F \circ P_G)(x) = \lambda x$$

On en déduit que :

$$(P_G \circ P_F \circ P_G)(x) = \lambda P_G(x)$$

$$\text{c'est-à-dire } (P_G \circ P_F)(P_G(x)) = \lambda P_G(x)$$

La valeur propre  $\lambda$  étant non nulle, le vecteur  $P_G(x)$  est différent de 0 et c'est un vecteur propre de  $P_G \circ P_F$  associé à la valeur propre  $\lambda$ .

□

## **1.5. Les principaux opérateurs de l'analyse des données**

Les sections précédentes nous ont permis de définir les propriétés générales des espaces de Hilbert et de développer une partie de la théorie concernant les opérateurs linéaires. Cependant, tout ceci s'est fait sans pour autant établir un lien quelconque avec les analyses de données multidimensionnelles. Aussi, l'objectif de cette cinquième et dernière section est de montrer que chacune des méthodes d'analyse des données revient simplement à faire l'étude d'opérateurs particuliers. Pour ce faire, nous effectuons un bref retour sur les différents espaces de base mis en jeu en analyse des données.

### 1.5.1 Les espaces de base de l'analyse des données

En analyse des données, on dispose en général de plusieurs mesures (quantitatives ou qualitatives) sur une population "d'individus". Par exemple, supposons que l'on s'intéresse à un échantillon de propriétaires d'automobiles. À chaque propriétaire on demande son âge, son sexe, sa catégorie socio-professionnelle (C.S.P.), son nombre d'enfants, etc. On a donc un tableau de données avec, par exemple, en colonne les différentes variables mesurées (âge, sexe, C.S.P., nombre d'enfants, etc.) et en lignes les individus interrogés. À l'intersection d'une ligne et d'une colonne, on a la valeur d'une caractéristique pour un individu.

Soient  $x^1, \dots, x^j, \dots, x^p$  les variables mesurées sur une population de  $n$  individus. Un individu  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  a donné la réponse  $x_i^j$  à la question (variable)  $x^j$ . On dispose donc d'un tableau de données composé de  $n$  lignes ou individus et  $p$  colonnes ou variables :

$$X_{n,p} = \begin{bmatrix} x_1^1 & \cdots & x_1^j & \cdots & x_1^p \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_i^1 & \cdots & x_i^j & \cdots & x_i^p \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^1 & \cdots & x_n^j & \cdots & x_n^p \end{bmatrix}$$

#### 1.5.1.1 Représentation des individus dans $\mathbb{R}^p$

On suppose que chaque individu  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  est muni d'un poids  $p_i > 0$  et que  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ . Par exemple, si tous les individus ont le même poids, on a  $p_i = \frac{1}{n} \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Chaque individu est alors représenté, dans le cas où les mesures sont quantitatives, par un vecteur de  $\mathbb{R}^p$  que l'on note de la façon suivante :



$$x_i = \begin{bmatrix} x_i^1 \\ \vdots \\ x_i^j \\ \vdots \\ x_i^p \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^p$$

On désigne par  $N$  le nuage de points de  $\mathbb{R}^p$  défini comme suit :

$$N = \left\{ (x_i, p_i) \mid x_i \in \mathbb{R}^p, p_i > 0, \sum_{i=1}^n p_i = 1, \forall i = 1, 2, \dots, n \right\}.$$

Suivant les méthodes,  $\mathbb{R}^p$  est muni d'un produit scalaire  $\pi$  associé à une quelconque matrice symétrique définie positive  $A$  ( $A$  est la représentation matricielle de  $\pi$ ). On note alors  $\langle x, y \rangle_\pi = {}^t x A y \quad \forall x \text{ et } y \in \mathbb{R}^p$ .

### 1.5.1.2 Représentation des variables dans $\mathbb{R}^{p*}$

L'espace dual de  $\mathbb{R}^p$ , noté  $\mathbb{R}^{p*}$ , est l'espace vectoriel des formes linéaires de  $\mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}$ . On munit  $\mathbb{R}^{p*}$  de la base  $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_p^*)$  duale de la base canonique  $(e_1, e_2, \dots, e_p)$  de  $\mathbb{R}^p$  et puisque

$$e_j^*(e_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

on a

$$e_j^*(x_i) = e_j^* \left( \sum_{k=1}^p x_i^k e_k \right) = \sum_{k=1}^p x_i^k e_j^*(e_k) = x_i^j$$

Ainsi, on peut identifier de façon naturelle les variables  $(x^1, x^2, \dots, x^p)$  à la base duale  $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_p^*)$  dans la mesure où  $x^j(x_i) = x^j \left( \sum_{k=1}^p x_i^k e_k \right) = x_i^j$  est bien la valeur de la  $j^{\text{e}}$  variable sur le  $i^{\text{e}}$  individu. Dans la suite de cet exposé, au lieu de  $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_p^*)$ , on notera  $(x^1, x^2, \dots, x^p)$  la base de  $\mathbb{R}^{p*}$  duale de  $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ .

Par ailleurs, toute combinaison linéaire des variables est ainsi assimilée à un élément quelconque  $a$  de  $\mathbb{R}^{p*}$  défini par  $\sum_{j=1}^p a_j x^j$ . Ainsi, sur un individu  $x_i \in \mathbb{R}^p$ , la variable  $a$  prend la

valeur  $a(x_i) = \left( \sum_{j=1}^p a_j x^j \right)(x_i) = \sum_{j=1}^p a_j x^j(x_i) = \sum_{j=1}^p a_j x_i^j$ , ce qui représente bien une combinaison

linéaire des variables initiales. Donc, toute nouvelle variable de la forme  $a = \sum_{k=1}^p a_k x^k$  sera

considérée comme un élément de  $\mathbb{R}^{p*}$ . Enfin, le produit scalaire  $\pi$  permet de définir un isomorphisme canonique (indépendant de toute base) entre  $\mathbb{R}^p$  et son dual  $\mathbb{R}^{p*}$ . Pour ce faire on définit, pour un vecteur  $u$  fixé, la forme linéaire  $\pi_u$  par :

$$\forall v \in \mathbb{R}^p \quad \pi_u(v) = \pi(u, v)$$

Par la suite, on peut considérer l'application  $\hat{\pi}$  de  $\mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}^{p*}$  définie par :

$$\forall u \in \mathbb{R}^p \quad \hat{\pi}(u) = \pi_u$$

Cette application, dont la matrice associée dans les bases canoniques de  $\mathbb{R}^p$  et  $\mathbb{R}^{p*}$  n'est autre que  $A$ , est un isomorphisme entre  $\mathbb{R}^p$  et  $\mathbb{R}^{p*}$ . De plus, l'introduction du produit scalaire  $\pi$  associé à la matrice  $A$  dans  $\mathbb{R}^p$  permet de munir naturellement l'espace  $\mathbb{R}^{p*}$  du produit scalaire  $\pi^*$  associé à la matrice  $A^{-1}$ .

### 1.5.1.3 Représentation des variables dans $\mathbb{R}^n$

Considérons l'application linéaire de  $\mathbb{R}^{p*}$  dans  $\mathbb{R}^n$  associée à la matrice  $X$  :

$$\mathbb{R}^{p*} \xrightarrow{X} \mathbb{R}^n$$

En sachant que les  $(x^1, x^2, \dots, x^p)$  constituent la base de  $\mathbb{R}^{p*}$  on obtient que :

$$Xx^j = \begin{bmatrix} x_1^1 & \cdots & x_1^j & \cdots & x_1^p \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_i^1 & \cdots & x_i^j & \cdots & x_i^p \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^1 & \cdots & x_n^j & \cdots & x_n^p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^j \\ \vdots \\ x_i^j \\ \vdots \\ x_n^j \end{bmatrix} = \xi^j \in \mathbb{R}^n$$

où  $\xi^j$  est le vecteur de  $\mathbb{R}^n$  associé à la  $j^{\text{e}}$  variable et où  $x^j$  est le vecteur des coordonnées de  $x^j$  dans la base  $(x^1, x^2, \dots, x^p)$ . Autrement dit, la matrice des données  $X_{n,p}$  fait correspondre aux vecteurs de la base de  $\mathbb{R}^{p*}$  les  $p$  vecteurs  $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^p \in \mathbb{R}^n$  représentant les variables dans  $\mathbb{R}^n$ . On peut alors munir  $\mathbb{R}^n$  du produit scalaire associé à la matrice  $D$  diagonale des poids des  $n$  individus :

$$D = \begin{bmatrix} p_1 & & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & p_i & & 0 \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & & p_n \end{bmatrix}$$

Le choix de cette métrique, en dehors de la simplicité des calculs qu'elle engendre, permet de donner dans  $\mathbb{R}^n$  un sens géométrique aux notions de variance, covariance et coefficient de corrélation lorsque les variables sont centrées sur la population totale. Dans ces conditions on obtient la représentation graphique suivante :

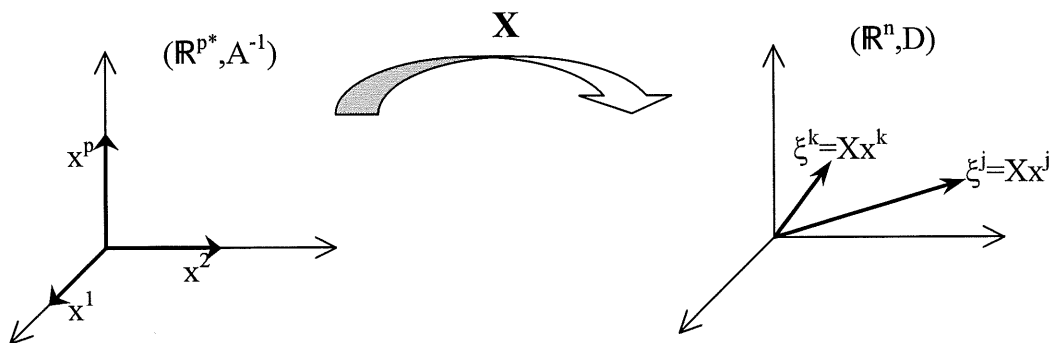


Figure 1 : Relation entre les espaces  $\mathbb{R}^{p*}$  et  $\mathbb{R}^n$

Ainsi, si  $\sum_{i=1}^n p_i x_i^j = 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, p$  on vérifie aisément que la variance empirique de  $x^j$  est égale au carré de la norme de  $\xi^j \in \mathbb{R}^n$  :

$$Var(x^j) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i^j)^2 = {}^t \xi^j D \xi^j = \|\xi^j\|^2.$$

Par ailleurs, le produit scalaire entre  $\xi^j$  et  $\xi^k \in \mathbb{R}^n$  est égal à la covariance empirique entre les variables  $x^j$  et  $x^k$  sur la population :

$$Cov(x^j, x^k) = \sum_{i=1}^n p_i x_i^j x_i^k = {}^t \xi^j D \xi^k = \langle \xi^j, \xi^k \rangle_D$$

Finalement, la corrélation entre  $x^j$  et  $x^k$  est égale au cosinus entre  $\xi^j$  et  $\xi^k \in \mathbb{R}^n$  :

$$\rho(x^j, x^k) = \frac{Cov(x^j, x^k)}{\sqrt{Var(x^j) Var(x^k)}} = \frac{\langle \xi^j, \xi^k \rangle_D}{\|\xi^j\| \|\xi^k\|} = \text{Cos}(\xi^j, \xi^k)$$

#### 1.5.1.4 Schéma de dualité

D'après les sections précédentes, dans l'espace  $\mathbb{R}^p$ , un individu  $i$  est représenté par un vecteur  $x_i$  muni du poids  $p_i$ . De plus,  $\mathbb{R}^p$  est muni d'un produit scalaire  $\pi$  associé à une matrice  $A$  symétrique définie positive. D'autre part, dans l'espace  $\mathbb{R}^{p*}$ , une variable  $x^j$  est assimilée à une forme linéaire et les  $p$  variables  $(x^1, x^2, \dots, x^p)$  forment une base de  $\mathbb{R}^{p*}$ . On a aussi que  $\mathbb{R}^{p*}$  est muni du produit scalaire  $\pi^*$  associé à la matrice  $A^{-1}$ . La matrice  $A$  (respectivement  $A^{-1}$ ) définit donc de manière naturelle un isomorphisme de  $\mathbb{R}^p$  sur  $\mathbb{R}^{p*}$  (respectivement de  $\mathbb{R}^{p*}$  sur  $\mathbb{R}^p$ ). Alors :

$$\begin{cases} \mathbb{R}^p \xrightarrow{A} \mathbb{R}^{p*} \\ u \mapsto a = Au \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \mathbb{R}^{p*} \xrightarrow{A^{-1}} \mathbb{R}^p \\ a \mapsto u = A^{-1}a \end{cases}$$

On peut représenter cette relation par l'illustration suivante :

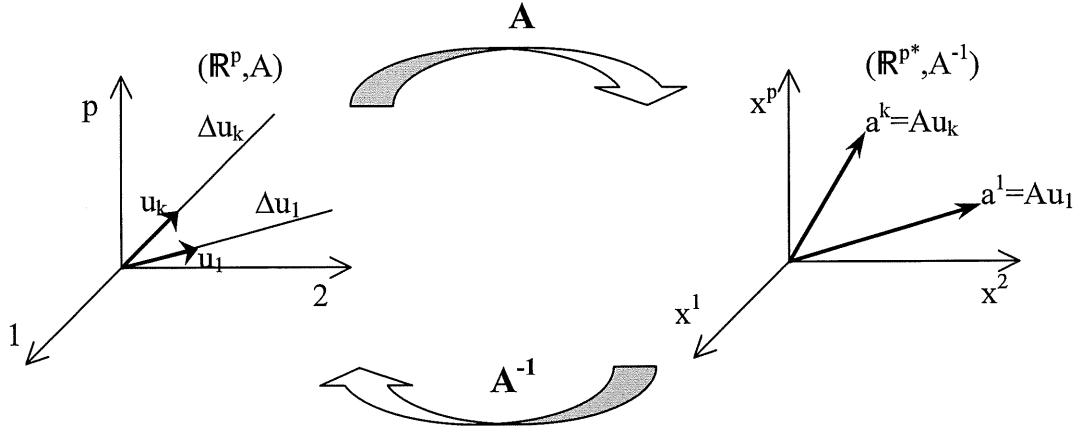


Figure 2 : Relation entre les espaces  $\mathbb{R}^p$  et  $\mathbb{R}^{p*}$

D'autre part, dans l'espace  $\mathbb{R}^n$  une variable est représentée par un vecteur  $\xi^j$  et  $\mathbb{R}^n$  est muni du produit scalaire associé à la matrice diagonale des poids  $D$ . Comme on l'a défini dans la section précédente, il existe une application linéaire de  $\mathbb{R}^{p*}$  dans  $\mathbb{R}^n$  associée à la matrice de données  $X_{n,p}$ . Alors,

$$\begin{cases} \mathbb{R}^{p*} \xrightarrow{X} \mathbb{R}^n \\ x^j \mapsto \xi^j = Xx^j \\ a \mapsto \alpha = Xa \end{cases}$$

L'illustration de cette relation entre les espaces  $\mathbb{R}^{p*}$  et  $\mathbb{R}^n$  est représentée dans la figure 1.

Par symétrie, on peut également définir l'espace  $\mathbb{R}^{n*}$  des formes linéaires sur  $\mathbb{R}^n$ . On peut alors montrer, de la même façon que précédemment, qu'il existe un isomorphisme entre  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}^{n*}$  associé à la matrice  $D$ . Ainsi, à une base  $D$ -orthonormée de  $\mathbb{R}^n$ , correspond une base duale  $D^{-1}$ -orthonormée de  $\mathbb{R}^{n*}$ .

Par ailleurs, on peut finalement définir une application de  $\mathbb{R}^{n*}$  dans  $\mathbb{R}^p$  en faisant correspondre à  $y \in \mathbb{R}^{n*}$  le vecteur  $z = {}^tXy \in \mathbb{R}^p$ . Cette application fait correspondre aux vecteurs de base de  $\mathbb{R}^{n*}$  les vecteurs  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^p$ , c'est-à-dire les  $n$  vecteurs de  $\mathbb{R}^p$  associés aux  $n$  individus.

Enfin, on résume habituellement ces relations entre ces différents espaces à l'intérieur d'un graphique appelé communément "schéma de dualité".

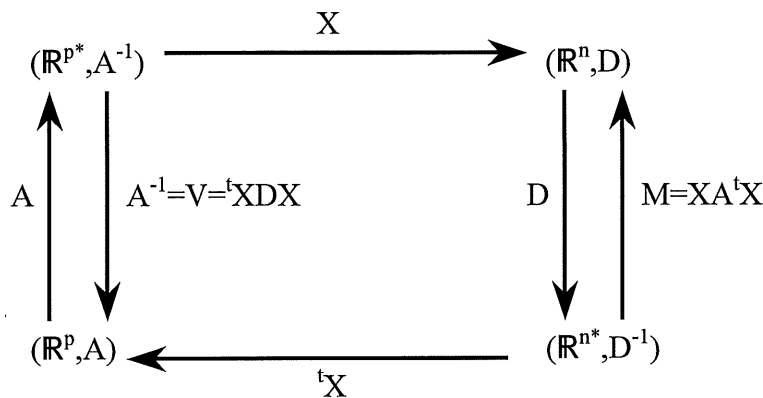


Figure 3 : *Schéma de dualité*

Notons que l'on passe de  $\mathbb{R}^p$  à  $\mathbb{R}^{p*}$  par l'intermédiaire de la matrice  $A$  tandis que l'on passe directement de  $\mathbb{R}^{p*}$  à  $\mathbb{R}^p$  par le produit de composition :  $V = {}^tXDX$  où  $V$  représente la matrice de variance-covariance empirique lorsque les variables sont centrées.

De même on passe de  $\mathbb{R}^n$  à  $\mathbb{R}^{n*}$  par la matrice  $D$  tandis que l'on passe directement de  $\mathbb{R}^{n*}$  à  $\mathbb{R}^n$  par le produit de composition :  $M = XA^tX$  où  $M$  représente la matrice des produits scalaires entre les individus.

### 1.5.2 Les opérateurs de l'analyse en composantes principales

L'analyse en composantes principales est l'étude d'un vecteur aléatoire  $X$  centré et de carré intégrable défini sur un espace probabilisé  $(\Omega, \tau, \mu)$ . Ce vecteur est à valeurs dans un espace euclidien  $E$ , de dimension  $p$ , que l'on identifiera à  $\mathbb{R}^p$  muni d'un produit scalaire  $\pi$  et dont  $A$

représente la matrice associée par rapport à la base canonique. On peut caractériser ce vecteur aléatoire par deux opérateurs : l'opérateur de covariance, défini sur  $\mathbb{R}^p$  et l'opérateur de produit scalaire défini sur l'espace hilbertien des variables aléatoires réelles de carré intégrable  $L^2(\Omega)$  que l'on a introduit au début de ce chapitre.

### 1.5.2.1 Opérateur de covariance

#### Définition 1.13

Soit  $u = {}^t(u_1, u_2, \dots, u_p)$  un vecteur de  $E = \mathbb{R}^p$  et soit  $X = {}^t(X_1, X_2, \dots, X_p)$  le vecteur aléatoire considéré. On définit la variable aléatoire notée  $u \cdot X$  par :

$$\forall \omega \in \Omega \quad (u \cdot X)(\omega) = u \cdot X(\omega) = \pi(u, X(\omega))$$

Considérons l'application  $G$  de  $E \times E$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$\forall (u, v) \in E \times E \quad G(u, v) = E[(u \cdot X)(v \cdot X)]$$

Puisque les variables aléatoires  $u \cdot X$  et  $v \cdot X$  sont centrées,  $G(u, v)$  est égal à leur covariance. De plus, on vérifie facilement que  $G$  est une forme bilinéaire symétrique semi-définie positive. On en déduit alors que l'application  $G_u$  :

$$\forall v \in E \quad G_u(v) = G(u, v)$$

est une forme linéaire sur  $E$ . L'espace  $E$  et son dual étant isomorphes par  $\hat{\pi}$  (voir section 1.5.1), on peut considérer  $\hat{\pi}^{-1}(G_u)$ , et l'on a :

$$\forall v \in E \quad \hat{\pi}^{-1}(G_u) \cdot v = G_u(v) = G(u, v)$$

Au vecteur  $u$  de  $E$  on lui associe ainsi un autre vecteur de  $E$  donné par  $\hat{\pi}^{-1}(G_u)$ .

#### Définition 1.14

On appelle opérateur de covariance du vecteur aléatoire  $X$  l'opérateur  $\Gamma$  défini sur  $E$  par :

$$\forall u \in E \quad \Gamma(u) = \hat{\pi}^{-1}(G_u)$$

Notons que l'opérateur de covariance possède la propriété caractéristique suivante :

$$\forall u \in E \quad \text{et} \quad \forall v \in E \quad \Gamma(u) \cdot v = E[(u \cdot X)(v \cdot X)]$$

Il en résulte donc la propriété ci-dessous :

L'opérateur de covariance  $\Gamma$  est symétrique semi-défini positif.

Il est maintenant intéressant d'utiliser cette propriété caractéristique afin d'associer à l'opérateur de covariance  $\Gamma$  une représentation matricielle. Soit  $A$  une matrice définissant dans  $\mathbb{R}^p$  un produit scalaire  $A$ -symétrique et semi-défini positif ainsi que deux vecteurs  $u$  et  $v$  de  $E$ . Il vient :

$$\begin{aligned} u \cdot X &= \langle u, X \rangle = {}^t u A X = {}^t X A u \\ \text{et} \quad v \cdot X &= \langle v, X \rangle = {}^t v A X = {}^t X A v \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \Gamma(u) \cdot v &= E[(u \cdot X)(v \cdot X)] \\ &= E[{}^t u A X {}^t X A v] \\ &= {}^t u A E[X {}^t X] A v \\ &= E[X {}^t X] A u \cdot v \\ &= V A(u) \cdot v \quad \text{où} \quad V = E[X {}^t X] \quad \text{est la matrice de variance - covariance} \end{aligned}$$

On en déduit alors que l'opérateur de covariance peut s'écrire sous la forme matricielle :

$$\Gamma = V A.$$

### ***1.5.2.2 Analyse en composantes principales et opérateurs de covariance***

On se propose dans cette sous-section de montrer que l'analyse en composantes principales d'un vecteur centré  $X$  revient à l'étude des éléments propres de l'opérateur de covariance  $\Gamma$ .



L'analyse en composantes principales d'un vecteur centré  $X$  consiste à déterminer une suite de variables aléatoires non corrélées deux à deux, combinaisons linéaires des variables aléatoires initiales  $X_j$  (donc de la forme  $u \cdot X$ ) et de variance maximale sous la contrainte  $\|u\|^2 = 1$ . L'opérateur  $\Gamma$  étant symétrique semi-défini positif, il existe une base orthonormée constituée par les  $p$  vecteurs propres  $u_1, u_2, \dots, u_p$  associés aux valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \geq 0$ . Ainsi, en vertu du théorème de décomposition spectrale il vient :

$$\Gamma = \sum_{j=1}^p \lambda_j P_{u_j} \quad \text{où } P_{u_j} \text{ désigne l'opérateur de projection orthogonale sur } u_j.$$

Chercher la première composante principale revient à déterminer le vecteur  $u$  tel que  $\Gamma(u) \cdot u = E(u \cdot X)^2 = \text{Var}(u \cdot X)$  soit maximale. Soit  $u$  un vecteur unitaire de  $\mathbb{R}^p$  et soit  $u_1, u_2, \dots, u_p$  la base orthonormée constituée des vecteurs propres de  $\Gamma$  associés aux valeurs propres  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p$ .

$$\begin{aligned} u &= \sum_{j=1}^p \alpha_j u_j \\ \Gamma(u) &= \sum_{j=1}^p \alpha_j \Gamma(u_j) = \sum_{j=1}^p \alpha_j \lambda_j u_j \\ \Gamma(u) \cdot u &= \left( \sum_{j=1}^p \alpha_j \lambda_j u_j \right) \cdot \left( \sum_{k=1}^p \alpha_k u_k \right) = \sum_{j=1}^p \alpha_j^2 \lambda_j \end{aligned}$$

Puisque  $u$  est unitaire,  $\sum_{j=1}^p \alpha_j^2 = 1$  et alors on obtient la majoration suivante :

$$0 \leq \Gamma(u) \cdot u = \sum_{j=1}^p \alpha_j^2 \lambda_j \leq \lambda_1$$

L'égalité à  $\lambda_1$  ayant lieu pour  $u = u_1$ , le vecteur unitaire  $u$  de  $\mathbb{R}^p$  qui maximise la variance de  $u \cdot X$  n'est autre que le vecteur propre  $u_1$  de l'opérateur  $\Gamma$  associé à la plus grande valeur propre  $\lambda_1$ . Le vecteur  $u_1$  de  $E$  porte le nom de 1<sup>er</sup> axe principal d'inertie et  $c_1 = u_1 \cdot X$  porte le nom de 1<sup>re</sup> composante principale.

Dans un second temps on cherche une nouvelle combinaison linéaire  $u \cdot X$  des variables  $X_1, X_2, \dots, X_p$  non corrélées à  $u_1 \cdot X$  (c'est-à-dire  $E[(u_1 \cdot X)(u \cdot X)] = 0$ ) et de variance maximale sous la contrainte  $\|u\|^2 = 1$ . Alors,

$$E[(u_1 \cdot X)(u \cdot X)] = \Gamma(u_1) \cdot u = \lambda_1 (u_1 \cdot u) \quad \Rightarrow \quad u_1 \cdot u = 0$$

Ainsi, la solution du problème doit se chercher dans le sous-espace orthogonal à  $u_1$ , que l'on note  $u_1^\perp$ .

On peut alors itérer le procédé en se plaçant dans l'orthogonal de  $u_1$  et  $u_2$ , de  $u_1, u_2$  et  $u_3$ , etc. Il apparaît que le vecteur cherché est à chaque fois le vecteur propre suivant et que la variance de la composante principale est égale à la valeur propre correspondante. Le processus s'arrête lorsque l'on découvre la première valeur propre nulle, les composantes principales étant alors de variance nulle, donc constantes et égales à 0 puisque centrées avec probabilité 1.

On peut donc résumer cette méthode itérative à l'intérieur du théorème qui suit :

#### Théorème 1.12

Les composantes principales d'un vecteur aléatoire centré  $X = {}^t(X_1, X_2, \dots, X_p)$  sont égales aux variables aléatoires  $C_\ell = u_\ell \cdot X$   $\ell = 1, 2, \dots, p$  où les vecteurs  $u_\ell$ , appelés vecteurs principaux, sont les vecteurs propres unitaires de l'opérateur de covariance  $\Gamma$  de  $X$  associés à la  $\ell^e$  valeur propre  $\lambda_\ell$  non nulle ( $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p$ ). De plus, la composante principale  $C_\ell$  est de variance  $\lambda_\ell$   $\ell = 1, 2, \dots, p$ .

#### **1.5.2.3 Opérateur de produit scalaire**

Comme on l'a mentionné au début de cette sous-section concernant l'analyse en composantes principales, deux types d'opérateurs peuvent être utilisés afin de caractériser un vecteur

aléatoire  $X$ . Le premier étant l'opérateur de covariance, on abordera ici le second à savoir l'opérateur de produit scalaire. Cette approche de l'analyse en composantes principales consiste à étudier la population sur laquelle sont définies les variables aléatoires  $X_j$ . En général, on se place dans le cas d'un nombre fini d'individus, ce qui permet d'identifier  $L^2(\Omega)$  avec  $\mathbb{R}^n$  et l'opérateur de produit scalaire est alors appelé opérateur d'ESCOUFIER [5].

*Définition 1.15*

On appelle opérateur de produit scalaire associé à  $Y$ , l'opérateur  $\Psi$  de  $L^2(\Omega)$  (ou de  $\mathbb{R}^n$ ) tel que :

$$\forall Y \in L^2(\Omega) \quad \Psi(Y) = E(YX) \cdot X \quad \text{où } E(YX) = {}^t(E(YX_1), E(YX_2), \dots, E(YX_p))$$

et  $X$  représente un vecteur aléatoire centré

On définit alors la variable aléatoire  $E(YX) \cdot X$  de la façon suivante :

$$\forall \omega \in \Omega \quad (E(YX) \cdot X)(\omega) = E(YX) \cdot X(\omega)$$

De plus, la variable aléatoire  $\Psi(Y)$  est centrée et de carré intégrable et, tout comme dans le cas de l'opérateur de covariance, l'opérateur  $\Psi$  de  $L^2(\Omega)$  est symétrique semi-défini positif.

Par ailleurs, afin de faciliter l'interprétation de l'opérateur de produit scalaire  $\Psi$ , on peut, comme pour l'opérateur de covariance, lui associer une représentation matricielle dans le cas où  $L^2(\Omega) \approx \mathbb{R}^n$ . Soit  $A$  une matrice définissant dans  $\mathbb{R}^p$  un produit scalaire  $A$ -symétrique et semi-défini positif. L'espace  $\mathbb{R}^n$ , repéré par rapport à sa base canonique, est muni de la métrique diagonale des poids suivante :

$$D = \begin{bmatrix} p_1 & & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & p_i & & 0 \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & & p_n \end{bmatrix}$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} E[YX_1] &= \sum_{i=1}^n p_i Y_i X_{1i} \\ E[YX_2] &= \sum_{i=1}^n p_i Y_i X_{2i} \\ &\dots \\ E[YX_p] &= \sum_{i=1}^n p_i Y_i X_{pi} \end{aligned}$$

La variable aléatoire  $\Psi(Y)$  a pour expression :

$$\Psi(Y) = E[YX] \cdot X = \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^p E[YX_j] a_{jk} X_k$$

où  $a_{jk}$  représente le terme de la matrice A situé à l'intersection de la  $j^e$  ligne et de la  $k^e$  colonne.

Ainsi, la valeur de la variable aléatoire  $\Psi(Y)$  pour la  $i^e$  observation est donnée par :

$$\begin{aligned} \Psi(Y)(i) &= \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^p \left( \sum_{\ell=1}^p p_{\ell} Y_{\ell} X_{j\ell} \right) a_{jk} X_{ki} \\ &= \sum_{\ell=1}^p p_{\ell} \left[ \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^p X_{j\ell} a_{jk} X_{ki} \right] Y_{\ell} \end{aligned}$$

On remarque que  $\sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^p X_{j\ell} a_{jk} X_{ki}$  est le produit scalaire entre les observations  $\ell$  et  $i$  du vecteur aléatoire X. En désignant par M la matrice de format  $n \times n$  des produits scalaires entre les observations il vient :

$$\sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^p X_{j\ell} a_{jk} X_{ki} = M_{i\ell}$$

où  $M_{i\ell}$  est l'élément de la matrice M situé à l'intersection de la  $i^e$  ligne et de la  $\ell^e$  colonne et représente le produit scalaire des observations  $i$  et  $\ell$  par rapport à la matrice A.

D'où,

$$\Psi(Y)(i) = \sum_{\ell=1}^p M_{i\ell} p_{\ell} Y_{\ell} = MD(Y)(i)$$

On en déduit alors que l'opérateur de produit scalaire peut s'écrire sous la forme matricielle  $\Psi=MD$  où  $M$  représente la matrice des produits scalaires entre les observations.

#### ***1.5.2.4 Relation entre l'opérateur de covariance et l'opérateur de produit scalaire***

Cette dernière sous-section concernant l'analyse en composantes principales a comme objectif d'énoncer et démontrer un théorème qui relie les éléments propres de ces deux opérateurs.

##### **Théorème 1.13**

L'opérateur de produit scalaire  $\Psi$  défini sur  $L^2(\Omega) (\mathbb{R}^n)$  et l'opérateur de covariance  $\Gamma$  défini sur  $E (\mathbb{R}^p)$  admettent les mêmes valeurs propres non nulles et les vecteurs propres  $C$  de  $\Psi$  se déduisent des vecteurs propres  $u$  de  $\Gamma$  par la relation :  $C = u \cdot X$

Démonstration :

Soit  $u$  un vecteur propre de  $\Gamma$  associé à une valeur propre  $\lambda$  non nulle :  $\Gamma(u)=\lambda u$ . On considère  $Y=u \cdot X$ . L'image de  $Y$  par  $\Psi$  est alors  $\Psi(Y)=E[XY] \cdot X$ . Le recours à une base orthonormée  $(e_1, e_2, \dots, e_p)$  de l'espace  $E$  simplifie les calculs, on a donc :

$$X = \sum_{j=1}^p X'_j e_j \quad \text{où} \quad X'_j = e_j \cdot X$$

$$E[XY] = \sum_{j=1}^p E[YX'_j] e_j$$

$$u \cdot X = \sum_{j=1}^p (u \cdot e_j) X'_j$$

On en déduit alors que :

$$\begin{aligned}
 \Psi(Y) &= \sum_{j=1}^p E[YX'_j] X'_j \\
 &= \sum_{j=1}^p E[(u \cdot X)(X \cdot e_j)] X'_j \\
 &= \sum_{j=1}^p (\Gamma(u) \cdot e_j) X'_j \quad \text{puisque } E[(u \cdot X)(e_j \cdot X)] = \Gamma(u) \cdot e_j \\
 &= \lambda \sum_{j=1}^p (u \cdot e_j) X'_j \\
 &= \lambda \sum_{j=1}^p (u \cdot e_j) (X \cdot e_j) \\
 &= \lambda (u \cdot X) \\
 &= \lambda Y
 \end{aligned}$$

La variance de  $Y = u \cdot X$  étant égale à  $\lambda \neq 0$ ,  $Y$  n'est pas égal au vecteur nul. C'est donc un vecteur propre de  $\Psi$  associé à la valeur propre  $\lambda$ . Réciproquement, soit  $Y$  un vecteur propre de  $\Psi$  associé à une valeur propre non nulle, on a :

$$\Psi(Y) = \lambda Y$$

et

$$E[YX] \cdot X = \lambda Y$$

On montre alors que  $u = E[YX]$  est un vecteur propre de  $\Gamma$  associé à la valeur propre  $\lambda$ . Toujours dans la base orthonormée  $(e_1, e_2, \dots, e_p)$  on a :

$$\begin{aligned}
u &= \sum_{j=1}^p E[X_j' Y] e_j \\
\Gamma(u) &= \sum_{j=1}^p E[X_j' Y] \Gamma(e_j) \\
&= \sum_{j=1}^p E[X_j' Y] \sum_{i=1}^p (\Gamma(e_j) \cdot e_i) e_i \\
&= \sum_{j=1}^p E[X_j' Y] \sum_{i=1}^p E[X_j' X_i'] e_i \\
&= \sum_{i=1}^p E \left[ X_i' \sum_{j=1}^p X_j' E[X_j' Y] e_i \right] \\
&= \sum_{i=1}^p \lambda E[X_i' Y] e_i \\
&= \lambda u
\end{aligned}$$

Le vecteur  $u$  est non nul puisque, par hypothèse,  $Y$  est non nul.

□

Notons, en terminant, qu'une conséquence immédiate de ce théorème est que les composantes principales d'un vecteur aléatoire  $X$  sont les vecteurs propres de l'opérateur de produit scalaire normés par la racine carrée de la valeur propre associée.

### 1.5.3 Les opérateurs de l'analyse canonique

L'analyse canonique est une méthode d'analyse factorielle permettant de comparer deux ensembles de variables définies sur le même espace probabilisé. Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction, l'analyse canonique mise au point par Hotelling en 1936 est l'une des premières méthodes à voir le jour. Malheureusement, on trouve peu d'applications pratiques de cette méthode en raison surtout de la difficulté d'interprétation des résultats qu'elle donne. Cependant, plusieurs méthodes plus utilisées, comme l'analyse des correspondances et l'analyse discriminante, peuvent être considérées comme des cas

particuliers de l'analyse canonique. D'ailleurs, les deux prochaines sous-sections sont consacrées exclusivement à ces deux méthodes.

### 1.5.3.1 Aperçu de la démarche

Soit  $(\Omega, \tau, \mu)$  un espace probabilisé sur lequel on considère deux ensembles de variables aléatoires  $(X_1, X_2, \dots, X_p)$  et  $(Y_1, Y_2, \dots, Y_q)$ . On suppose que les variables aléatoires  $X_i$   $i=1, 2, \dots, p$  et  $Y_j$   $j=1, 2, \dots, q$  sont centrées et de carré intégrable. Autrement dit,  $X_i$   $i=1, 2, \dots, p$  et  $Y_j$   $j=1, 2, \dots, q$  appartiennent à  $L^2(\Omega)$  qui est en général associé à  $\mathbb{R}^n$ . On appelle  $F$  (respectivement  $G$ ) le sous-espace de  $L^2(\Omega)$  engendré par les  $X_i$  (respectivement les  $Y_j$ ).

L'analyse canonique se propose d'étudier les positions respectives des sous-espaces  $F$  et  $G$  de  $L^2(\Omega)$ . Il est intuitivement clair que  $F$  et  $G$  seront "proches" si  $P_F$  et  $P_G$  se "ressemblent". Afin de donner un sens à cette remarque, désignons par  $\mathfrak{I}(E)$  l'ensemble des opérateurs symétriques définis sur un espace euclidien quelconque  $E$  de dimension finie. On utilise alors le produit scalaire de Hilbert-Schmidt que l'on a introduit à la section 1.3.2 et qui se définit, pour deux éléments  $S$  et  $T$  de  $\mathfrak{I}(E)$ , de la façon suivante :

$$\langle S, T \rangle_{H.S.} = \text{tr}(S \circ T) = \text{tr}(T \circ S)$$

Rappelons que la considération des bases orthonormées de  $E$   $(u_1, u_2, \dots, u_p)$  et  $(v_1, v_2, \dots, v_p)$  constituées des vecteurs propres de  $S$  et  $T$  associés aux valeurs propres  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$  et  $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p)$  nous permet d'écrire :

$$\langle S, T \rangle_{H.S.} = \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^p \lambda_j \mu_k \langle u_j, v_k \rangle^2$$

$$\|T\|_{H.S.}^2 = \text{tr}(T \circ T) = \sum_{i=1}^p \lambda_i^2$$

$$\text{Cos}(S, T) = \frac{\langle S, T \rangle_{H.S.}}{\|S\|_{H.S.} \|T\|_{H.S.}}$$



On dispose donc d'un instrument pour mesurer la proximité entre deux projecteurs S et T de même qu'entre  $\text{Im}(S)$  et  $\text{Im}(T)$ .

En analyse canonique on cherche les couples  $(U_k, V_k)$  de  $F \times G$  de corrélation maximale ( $\rho^2(U_k, V_k)$  maximum) sous les contraintes d'orthonormalité ci-dessous :

$$E(U_k U_{k'}) = E(V_k V_{k'}) = \delta_{k,k'} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = k' \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad k=1,2,\dots,\min(p,q)$$

La première itération revient à résoudre le problème de maximisation qui suit :

$$\begin{aligned} & \max E(U_1 V_1) \\ & \|U_1\|^2 = \|V_1\|^2 = 1 \\ & U_1 \in F, \quad V_1 \in G \end{aligned}$$

Par la suite, les autres itérations prennent en compte comme contraintes supplémentaires la non-corrélation aux variables aléatoires déjà calculées.

D'autre part, précisons que les variables  $U_k$  et  $V_k$  déterminées par la résolution du programme précédent présentent une corrélation positive. En effet, soit  $(U_r, V_r)$  le dernier couple de corrélation strictement positive, on a :

$$E(U_{r+1}, V_{r+1}) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad E(-U_{r+1}, V_{r+1}) \geq 0$$

Les variables aléatoires  $-U_{r+1}$  et  $V_{r+1}$  étant non corrélées aux précédentes, on en déduit par définition de  $r$  que :  $E(U_{r+1}, V_{r+1}) = 0$ .

Enfin, notons qu'il est possible d'exprimer le problème posé par l'analyse canonique en termes d'opérateurs de projection orthogonale. Le coefficient de corrélation entre  $U_1$  et  $V_1$  étant positif, il revient au même de maximiser son carré. Désignons par  $P_{U_1}$  et  $P_{V_1}$  les opérateurs de projections orthogonales sur les droites vectorielles de  $L^2(\Omega)$  engendrées par  $U_1$  et  $V_1$ , on a alors :

$$\begin{aligned}
\langle P_{U_1}, P_{V_1} \rangle_{H.S.} &= \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^p \lambda_j \mu_k \langle u_j, v_k \rangle^2 \\
&= \langle U_1, V_1 \rangle^2 \\
&= \rho^2(U_1, V_1) \\
&= \cos(P_{U_1}, P_{V_1})
\end{aligned}$$

Notons que  $U_1^\perp$  et  $V_1^\perp$  sont sous-espaces propres associés à la valeur propre  $\lambda=0$  des opérateurs  $P_{U_1}$  et  $P_{V_1}$ .

Le problème revient donc à déterminer une suite de couples de projecteurs  $P_{U_k}$  et  $P_{V_k}$  de cosinus maximal telle que :

$$\langle P_{U_k}, P_{U_{k'}} \rangle_{H.S.} = \langle P_{V_k}, P_{V_{k'}} \rangle_{H.S.} = \delta_k^{k'}$$

### 1.5.3.2 Résolution mathématique

Rappelons que l'objectif poursuivi consiste à déterminer les vecteurs  $U_1 \in F$  et  $V_1 \in G$  tels que  $U_1$  et  $V_1$  soient les vecteurs propres des opérateurs de projection. Désignons par  $F+G$  l'espace défini par  $\{x+y \mid x \in F \text{ et } y \in G\}$  et notons par  $P_F$  et  $P_G$  les restrictions des projecteurs sur  $F$  et  $G$  au sous-espace  $F+G$  de  $L^2(\Omega)$ . On sait que les restrictions des opérateurs  $P_F \circ P_G$  et  $P_G \circ P_F$  à  $G$  et  $F$  sont symétriques et positives.

On suppose le problème résolu, à savoir que  $U_1$  et  $V_1$  sont unitaires et de covariance maximale. On complète  $\{V_1\}$  par  $q-1$  vecteurs orthonormés  $\{V_2, V_3, \dots, V_q\}$  de  $G$  de sorte que  $\{V_1, V_2, \dots, V_q\}$  soit une base orthonormée de  $G$ . On obtient alors que :

$$\begin{aligned}
P_G(U_1) &= \sum_{\ell=1}^q E(U_1 V_\ell) V_\ell \\
Var(P_G(U_1)) &= \sum_{\ell=1}^q E(U_1 V_\ell)^2 = \|P_G(U_1)\|^2 \\
\langle U_1, P_G(U_1) \rangle &= E(U_1 P_G(U_1)) = \sum_{\ell=1}^q E(U_1 V_\ell)^2 = \|P_G(U_1)\|^2
\end{aligned}$$

On en déduit alors que :

$$\frac{E(U_1 P_G(U_1))}{[Var(P_G(U_1))]^{1/2}} = \left[ \sum_{\ell=1}^q (E(U_1 V_\ell))^2 \right]^{1/2} \geq E(U_1 V_1)$$

L'inégalité stricte ne peut avoir lieu car  $(U_1, V_1)$  est solution du problème et non  $(U_1, P_G(U_1))$ .

Par conséquent, les variables aléatoires  $U_1$  et  $V_\ell$   $\ell=2,3,\dots,q$  sont non corrélées (c'est-à-dire  $\forall \ell=2,3,\dots,q \ E(U_1 V_\ell)=0$ ) et on a :

$$P_G(U_1) = E(U_1 V_1) V_1$$

Le problème étant symétrique, on peut compléter  $U_1$  par  $p-1$  éléments de  $F$  afin d'obtenir une base orthonormée  $\{U_1, U_2, \dots, U_p\}$  de  $F$  et on obtient suivant la procédure précédente :

$$\begin{aligned} E(V_1 U_k) &= 0 \quad \forall k = 2, 3, \dots, p \\ P_F(V_1) &= E(U_1 V_1) U_1 \end{aligned}$$

On aboutit enfin au résultat suivant :

$$\begin{aligned} (P_F \circ P_G)(U_1) &= E(U_1 V_1) P_F(V_1) = (E(U_1 V_1))^2 U_1 \\ (P_G \circ P_F)(V_1) &= E(U_1 V_1) P_G(U_1) = (E(U_1 V_1))^2 V_1 \end{aligned}$$

La démarche présentée ci-dessus a été effectuée dans le cas particulier du premier couple de variables aléatoires  $(U_1, V_1)$ . Notons cependant que cette résolution peut facilement se généraliser afin de déterminer les couples  $(U_k, V_k)$  subséquents. Le théorème qui suit présente les résultats principaux permettant de résoudre le problème portant sur un couple de variables aléatoires  $(U_k, V_k)$  quelconque.

#### Théorème 1.14

Les variables aléatoires  $U_k$  et  $V_k$   $k=1,2,\dots,\min(p,q)$  centrées réduites, de corrélation maximale et non corrélées deux à deux sont vecteurs propres des opérateurs  $P_F \circ P_G$  et  $P_G \circ P_F$  associés aux valeurs propres  $\lambda_k$   $k=1,2,\dots,\min(p,q)$  ordonnées par valeurs décroissantes. Les carrés des coefficients de corrélation sont égaux aux valeurs propres correspondantes.

### Définition 1.16

Les variables  $U_k$  et  $V_k$  sont appelées caractères canoniques. Le coefficient  $E(U_k V_k)$  est appelé coefficient de corrélation canonique.

Enfin, on termine cette section avec un théorème qui permet d'exprimer le produit scalaire entre les opérateurs de projection  $P_F$  et  $P_G$  en fonction des valeurs propres associées aux caractères canoniques.

### Théorème 1.15

Soient  $P_F$  et  $P_G$  les opérateurs de projection orthogonale sur les sous-espaces  $F$  et  $G$  engendrés par les variables aléatoires  $(X_1, X_2, \dots, X_p)$  et  $(Y_1, Y_2, \dots, Y_q)$ . Soient  $(U_1, V_1), (U_2, V_2), \dots, (U_r, V_r)$   $r = \min(p, q)$  les paires de variables canoniques associées aux valeurs propres  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r \geq 0$ . Alors, le produit scalaire des projecteurs sur  $F$  et  $G$  est égal à la somme des carrés des coefficients de corrélation canonique. En d'autres termes :

$$\langle P_F, P_G \rangle_{H.S.} = \sum_{k=1}^r \lambda_k \quad \text{où } r = \min(p, q)$$

Démonstration :

Le produit scalaire entre les opérateurs de projection  $P_F$  et  $P_G$  est donné par l'expression suivante :

$$\langle P_F, P_G \rangle_{H.S.} = \sum_{j=1}^p \sum_{\ell=1}^q \alpha_j \beta_\ell \langle U_j, V_\ell \rangle^2 \quad \text{où } \alpha_j \text{ et } \beta_\ell \text{ sont les valeurs propres de } P_F \text{ et } P_G.$$

Or, par construction des  $U_j$  et  $V_\ell$  on a :

$$\langle U_j, V_\ell \rangle^2 = \delta_j^\ell \cdot \rho^2(U_j, V_\ell) \quad j, \ell = 1, 2, \dots, \min(p, q)$$

$$\alpha_j = \begin{cases} 1 & j = 1, 2, \dots, p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\beta_\ell = \begin{cases} 1 & \ell = 1, 2, \dots, q \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\langle P_F, P_G \rangle_{H.S.} &= \sum_{j=1}^p \sum_{\ell=1}^q \alpha_j \beta_\ell \langle U_j, V_\ell \rangle^2 \\
&= \sum_{j=1}^p \sum_{\ell=1}^q \langle U_j, V_\ell \rangle^2 \\
&= \sum_{j=1}^p \sum_{\ell=1}^q \delta_j^\ell \rho^2(U_j, V_\ell) \\
&= \sum_{k=1}^r \rho^2(U_k, V_k) \quad \text{où } r = \min(p, q) \\
&= \sum_{k=1}^r \lambda_k
\end{aligned}$$

Donc,

$$\langle P_F, P_G \rangle_{H.S.} = \sum_{k=1}^r \lambda_k \quad \text{où } r = \min(p, q)$$

□

Nous nous proposons dans les deux prochaines sections d'étudier les opérateurs caractéristiques de deux méthodes considérées comme des cas particuliers de l'analyse canonique : l'analyse factorielle discriminante et l'analyse factorielle des correspondances. La présentation de ces méthodes nous amène cependant à munir les espaces  $\mathbb{R}^p$  et  $\mathbb{R}^q$  d'une métrique particulière appelée métrique de Mahalanobis. La sous-section qui suit a donc pour objectif d'exposer la théorie relative à cette nouvelle métrique afin de faciliter la compréhension des sections subséquentes.

### 1.5.3.3 Métrique de Mahalanobis

Soit  $X=(X_1, X_2, \dots, X_p)$  un vecteur aléatoire à valeurs dans l'espace  $E=\mathbb{R}^p$  muni du produit scalaire  $\pi$ . On note  $F$  le sous-espace de  $L^2(\Omega)$  engendré par les variables aléatoires  $X_j$   $j=1, 2, \dots, p$  supposées linéairement indépendantes.

### Définition 1.17

On appelle métrique de Mahalanobis le produit scalaire  $\pi$  défini sur  $E$  tel que :

$$\forall (u, v) \in E \times E \quad \pi(u, v) = u \cdot v = E[(u \cdot X)(v \cdot X)]$$

On peut donc considérer la métrique de Mahalanobis sur  $\mathbb{R}^p$  comme induite par le produit scalaire défini sur  $L^2(\Omega)$ . En particulier, la contrainte  $E(u \cdot X)^2 = 1$  dans  $L^2(\Omega)$  correspond à  $\|u\|^2 = 1$  dans  $\mathbb{R}^p$ . L'opérateur de covariance  $\Gamma$  du vecteur  $X$  vérifie par définition :

$$\Gamma(u) \cdot v = E[(u \cdot X)(v \cdot X)]$$

L'opérateur de covariance est donc égal à l'identité. Ceci revient donc à choisir dans  $\mathbb{R}^p$  la métrique associée à  $V^{-1}$  ( $\Gamma = VA = I$ ).

### 1.5.4 Les opérateurs de l'analyse discriminante

Comme nous l'avons mentionné dans la section précédente, l'analyse discriminante peut être considérée comme étant un cas particulier de l'analyse canonique. En fait, elle consiste à effectuer une analyse canonique entre un ensemble de variables quantitatives et l'ensemble de variables indicatrices d'une seule variable qualitative qui dans la pratique représente chacune des modalités d'appartenance à une classe ou un groupe. La procédure revient donc à étudier les opérateurs de projection de  $L^2(\Omega)$  sur le sous-espace  $F$  engendré par les variables quantitatives  $(X_1, X_2, \dots, X_p)$  et sur le sous-espace  $G$  engendré par les variables indicatrices  $(Y_1, Y_2, \dots, Y_q)$ .

En principe, les deux vecteurs aléatoires doivent être centrés. Dans le cas particulier de l'analyse discriminante, il suffit de centrer uniquement les variables quantitatives en vertu du fait que la variable aléatoire  $\mathbf{1}$  est orthogonale au sous-espace  $F$  ( $E(\mathbf{1}X_j) = 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, p$ ). D'autre part, le sous-espace  $G$  contenant la variable aléatoire  $\mathbf{1}$  qui est la somme des variables indicatrices, les variables canoniques de  $G$  sont aussi centrées.

Si on désigne par  $(U_1, V_1)$  la première paire de variables canoniques ( $U_1 \in F$  et  $V_1 \in G$ ) et par  $P_F$  et  $P_G$  les opérateurs de projection sur les sous-espaces  $F$  et  $G$  on obtient que :

$$P_G(U_1) = E(U_1 V_1) V_1$$

$$P_F(V_1) = E(U_1 V_1) U_1$$

Les espaces  $\mathbb{R}^p$  et  $\mathbb{R}^q$  étant munis des métriques de Mahalanobis on a :

$$U_1 = u_1 \cdot X \quad \|u_1\|^2 = 1$$

$$V_1 = v_1 \cdot Y \quad \|v_1\|^2 = 1$$

On considère les variables aléatoires  $Y'_\ell$  de  $G$  qui se définissent comme suit :

$$\forall \ell = 1, 2, \dots, q \quad Y'_\ell = \frac{Y_\ell}{\sqrt{p_\ell}} \quad \text{où } p_\ell = E(Y_\ell)$$

Ainsi, en considérant les propriétés de  $Y_\ell$  ( $\|Y_\ell\|^2 = E(Y_\ell^2) = E(Y_\ell) = p_\ell$ ) le système  $\{Y'_\ell\}$   $\ell=1, 2, \dots, q$  est une base orthonormée de  $G$  dans laquelle  $P_G(U_1)$  s'exprime sous la forme :

$$P_G(U_1) = \sum_{\ell=1}^q E(U_1 Y'_\ell) Y'_\ell = \sum_{\ell=1}^q \frac{1}{p_\ell} E(U_1 Y_\ell) Y_\ell$$

Or,

$$E(U_1 Y_\ell) = E[E(U_1 Y_\ell | Y_\ell)] = p_\ell E[U_1 | Y_\ell = 1]$$

Donc,

$$P_G(U_1) = \sum_{\ell=1}^q \sqrt{p_\ell} E[U_1 | Y_\ell = 1] Y'_\ell$$

Par conséquent, en tenant compte de l'orthogonalité de la base  $Y'_\ell$   $\ell=1, 2, \dots, q$  on a :

$$\begin{aligned} \|P_G(U_1)\|^2 &= E[P_G(U_1)]^2 \\ &= \sum_{\ell=1}^q p_\ell E[U_1 | Y_\ell = 1]^2 \\ &= \text{Var}(P_G(U_1)) \end{aligned}$$

On reconnaît ici la variance interclasse de  $U_1$ , égale au carré du coefficient de corrélation canonique  $\lambda_1$ . La variance totale de  $U_1$  étant égale à 1, on retrouve le critère classique de l'analyse discriminante qui est la maximisation du rapport de la variance interclasse à la variance totale (ici égale à 1).

### 1.5.5 Les opérateurs de l'analyse des correspondances

Tout comme l'analyse discriminante, l'analyse des correspondances peut être considérée comme un cas particulier de l'analyse canonique. En fait, l'analyse des correspondances donne la répartition d'une population suivant les modalités de deux variables qualitatives  $X$  et  $Y$ . Il est donc naturel, afin de comparer ces deux variables, d'effectuer l'analyse canonique des vecteurs définis par les variables indicatrices de leurs modalités.

Soient  $F$  et  $G$  les sous-espaces de  $L^2(\Omega)$  engendrés respectivement par les variables aléatoires réelles  $X_j$   $j=1,2,\dots,p$  et  $Y_\ell$   $\ell=1,2,\dots,q$ . Les données initiales se présentent sous la forme d'un tableau de contingence exprimé de la façon suivante :

$$\begin{array}{c}
 \underbrace{\hspace{10em}}_Y \\
 Y_1 \quad \cdots \quad Y_j \quad \cdots \quad Y_q \\
 \\
 X \left\{ \begin{array}{l} X_1 \\ \vdots \\ X_i \\ \vdots \\ X_p \end{array} \right. \left[ \begin{array}{ccccc} n_{11} & \cdots & n_{1j} & \cdots & n_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n_{i1} & \cdots & n_{ij} & \cdots & n_{iq} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n_{p1} & \cdots & n_{pj} & \cdots & n_{pq} \end{array} \right]
 \end{array}$$

où  $n_{ij}$  représente le nombre d'individus possédant à la fois le caractère  $i$  et le caractère  $j$ .

Généralement, on effectue une transformation de ce tableau afin d'obtenir une nouvelle structure des données que l'on appelle : codage disjonctif complet des données. Le tableau



logique ou disjonctif complet est un tableau composé de données linéaires, c'est-à-dire codées 0 ou 1. La donnée située sur la ligne  $i$  et dans la colonne  $j$  vaut 1 ou 0, selon que le caractère  $i$  est présent ou non dans le caractère  $j$ . Cette nouvelle structure peut être représentée, à titre d'exemple, sous la forme suivante :

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \tilde{X} \\ \hline X_1 \quad X_2 \quad X_3 \quad \cdots \quad X_p \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c} \tilde{Y} \\ \hline Y_1 \quad Y_2 \quad Y_3 \quad \cdots \quad Y_q \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & \cdots & 1
 \end{bmatrix}
 \begin{array}{c}
 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\
 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 0 & 0 & 1 & \cdots & 0
 \end{bmatrix}
 = \text{Tableau disjonctif complet}$$

où  $\tilde{X}$  et  $\tilde{Y}$  sont des matrices de formats respectifs  $n \times p$  et  $n \times q$  lorsque  $n$  est le nombre d'individus total

Ainsi, l'analyse des correspondances consiste en l'analyse canonique des variables  $X_j$   $j=1,2,\dots,p$  et  $Y_\ell$   $\ell=1,2,\dots,q$ . En principe, l'analyse canonique doit être effectuée sur des variables centrées. Dans le cas particulier de l'analyse des correspondances, cette remarque n'a pas d'importance puisque la variable aléatoire  $\mathbf{1}$  est la somme des  $X_j$   $j=1,2,\dots,p$  et est également la somme des  $Y_\ell$   $\ell=1,2,\dots,q$ .  $\mathbf{1}$  appartient donc à  $F \cap G$  et le couple  $(\mathbf{1}, \mathbf{1})$  est le premier couple canonique avec un coefficient de corrélation canonique égal à 1 :

$$P_F \circ P_G(\mathbf{1}) = P_F(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$$

On retrouve ici la notion de vecteur trivial et de valeur propre triviale égale à 1. Les autres caractères canoniques étant orthogonaux à  $\mathbf{1}$ , il vient :

$$\forall k = 2, 3, \dots, \min(p, q) \quad E(U_k \mathbf{1}) = E(V_k \mathbf{1}) = 0$$

Ils sont évidemment centrés et l'espérance de leur produit est égale à leur coefficient de corrélation  $(E(U_k V_k) = \rho(U_k, V_k))$ . Les espaces  $\mathbb{R}^p$  et  $\mathbb{R}^q$  étant munis des métriques de Mahalanobis on a :

$$\begin{aligned} U_k &= u_k \cdot X & \|u_k\|^2 &= 1 \\ V_k &= v_k \cdot Y & \|v_k\|^2 &= 1 \end{aligned}$$

Les caractères canoniques donnent des bases orthonormées de F et G les plus proches l'une de l'autre au sens de  $L^2(\Omega)$ . Il est donc naturel de vouloir comparer les deux représentations de F et de G.

Afin de représenter la modalité  $Y_\ell$  dans l'espace F engendré par les  $X_j$   $j=1,2,\dots,p$ , on utilise la base des caractères canoniques  $U_k$  de F. Il s'ensuit que les coordonnées de  $Y_\ell$  sont les covariances  $E(Y_\ell U_k)$ . Or le sous-espace G se décompose en somme directe :

$$G = G_r \oplus G_r^\perp$$

où  $G_r$  est le sous-espace de G engendré par les  $V_k$   $k=1,2,\dots,r=\min(p,q)$ .

Suivant cette décomposition et en utilisant des notations évidentes on a :

$$Y = Y_r + Y - Y_r \quad \text{où} \quad Y_r \in G_r \quad \text{et} \quad Y - Y_r \in G_r^\perp$$

Par conséquent,

$$Y_\ell = \sum_{k=1}^r E(Y_\ell V_k) V_k + (Y - Y_r)$$

En vertu du fait que F est orthogonal à  $G_r^\perp$  on obtient que :

$$\begin{aligned} \langle Y_\ell, U_k \rangle &= E(Y_\ell U_k) \\ &= E \left[ \sum_{k'=1}^r E(Y_\ell V_{k'}) V_{k'} U_k \right] \\ &= \sqrt{\lambda_k} E(Y_\ell V_k) \\ &= \sqrt{\lambda_k} \langle Y_\ell, V_k \rangle \end{aligned}$$

où  $\lambda_k$  est la  $k^e$  valeur propre de l'opérateur  $P_F \circ P_G$ .

Les coordonnées dans le système orthonormé  $(U_k)$   $k=1,2,\dots,r$  de la projection de  $Y_\ell$  sur  $F$  sont donc égales aux produits de ses coordonnées dans le système orthonormé  $(V_k)$   $k=1,2,\dots,r$  par le coefficient de corrélation canonique correspondant. On justifie ainsi la procédure de représentation simultanée utilisée en analyse des correspondances.

Cette approche débouche sur une interprétation du  $\chi^2$  de contingence et du  $\phi^2$  de Yule. On pose :

$$\forall j=1,2,\dots,p \text{ et } \forall \ell=1,2,\dots,q$$

$$p_{j,\ell} = E(X_j Y_\ell)$$

$$p_{j\cdot} = \sum_{\ell=1}^q p_{j,\ell} \quad (\text{poids de la modalité } X_j)$$

$$p_{\cdot\ell} = \sum_{j=1}^p p_{j,\ell} \quad (\text{poids de la modalité } Y_\ell)$$

Les systèmes  $\left( \frac{X_j}{\sqrt{p_{j\cdot}}} \right)_{j=1,2,\dots,p}$  et  $\left( \frac{Y_\ell}{\sqrt{p_{\cdot\ell}}} \right)_{\ell=1,2,\dots,q}$  sont des bases orthonormées des sous-espaces  $F$  et  $G$ .

Il s'ensuit que :

$$\langle P_F, P_G \rangle_{H.S.} = \sum_{j=1}^p \sum_{\ell=1}^q \alpha_j \beta_\ell \left\langle \frac{X_j}{\sqrt{p_{j\cdot}}}, \frac{Y_\ell}{\sqrt{p_{\cdot\ell}}} \right\rangle_{L^2(\Omega)}^2 \quad \text{où} \quad \alpha_j = 1 \quad \forall j = 1, 2, \dots, p$$

$$\beta_\ell = 1 \quad \forall \ell = 1, 2, \dots, q$$

$$(X_j Y_\ell)^2 = X_j Y_\ell$$

D'où,

$$\begin{aligned}
 \langle P_F, P_G \rangle_{H.S.} &= \sum_{j=1}^p \sum_{\ell=1}^q E \left[ \frac{X_j Y_\ell}{\sqrt{p_{j.} p_{. \ell}}} \right]^2 \\
 &= \sum_{j=1}^p \sum_{\ell=1}^q \frac{p_{j\ell}^2}{p_{j.} p_{. \ell}} \\
 &= \sum_{k=1}^p \lambda_k = 1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p \\
 &= \sum_{j=1}^p \sum_{\ell=1}^q \frac{(p_{j\ell} - p_{j.} p_{. \ell})^2}{p_{j.} p_{. \ell}} + 1 \\
 &= \chi^2 / n + 1
 \end{aligned}$$

Finalement on retrouve une propriété connue de l'analyse des correspondances. Le produit scalaire des opérateurs  $P_F$  et  $P_G$  est égal au  $\phi^2$  de Yule (c'est-à-dire le  $\chi^2$  de contingence divisé par  $n$ ) auquel s'ajoute la constante 1. On peut donc interpréter ce  $\phi^2$  en terme de somme des coefficients de corrélation canonique (les valeurs propres), la constante 1 correspondant à la valeur propre triviale.

Cette section clôtur le premier chapitre de ce mémoire qui consistait à faire un survol des méthodes classiques en analyse des données tout en établissant les liens étroits avec la notion d'opérateur. Il s'avère maintenant intéressant de généraliser ces méthodes afin d'effectuer l'analyse simultanée de plusieurs tableaux de données caractérisés par les opérateurs qui leur sont associés. C'est en fait ce que nous nous proposons de faire dans le prochain chapitre qui s'intitule : Extension de l'analyse factorielle d'opérateurs.

## CHAPITRE 2

### EXTENSION DE L'ANALYSE FACTORIELLE D'OPÉRATEURS

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté les outils mathématiques utilisés en analyse des données et précisé les différents types d'opérateurs utilisés dans les méthodes classiques d'analyse de données. Cependant, il arrive fréquemment qu'en pratique on soit confronté non pas à un seul tableau de données, mais bien à une suite de tableaux souvent indicés par le temps comme nous le présente la figure 4 suivante :

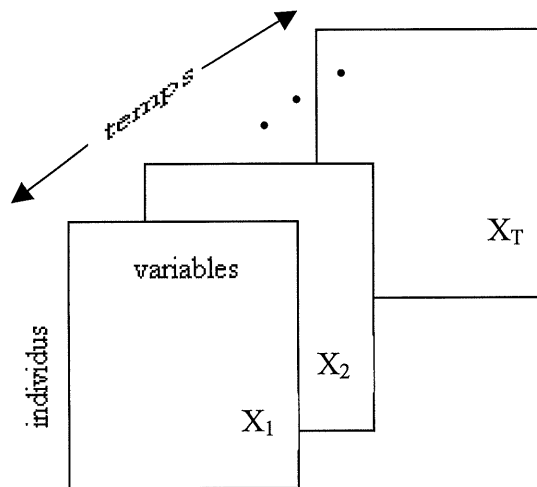


Figure 4 : *Concept de l'analyse factorielle d'opérateurs*

À titre d'exemple, on peut considérer le cas d'une étude économique où l'on pourrait analyser le comportement de certaines actions boursières par rapport à certaines variables telles le volume des transactions, le prix de l'action, la variation lors de la dernière période, etc. Par ailleurs, on peut aussi considérer le cas d'une étude sur l'efficacité de différents traitements médicaux où l'on pourrait analyser les réactions et le rétablissement des patients à travers des contrôles périodiques caractérisés par un certain nombre de variables. Dans ces deux cas, les méthodes classiques décrites au chapitre précédent s'avèrent inadéquates. Il convient alors de

généraliser ces méthodes afin de permettre l'étude simultanée de plusieurs tableaux de données. Connaissant les techniques portant sur un seul tableau, l'idée principale de cette généralisation consiste à résumer l'ensemble des tableaux de données par un unique tableau sur lequel on effectue l'analyse en s'inspirant des techniques traditionnelles. Dans cette perspective, on représente chaque tableau de données par un opérateur contenant toute l'information incluse dans ce dernier. Ainsi, les notions introduites dans le premier chapitre s'avéreront très utiles dans le développement qui va suivre.

Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction, il existe plusieurs méthodes d'analyse des données permettant de résoudre ce type de problème. En ce qui nous concerne, notre attention se portera plus particulièrement sur la méthode d'analyse conjointe de tableaux quantitatifs nommée STATIS [17] (Structuration des Tableaux À Trois Indices de la Statistique). Cependant, en tant que statisticien, nous cherchons toujours une nouvelle façon d'analyser les données afin de découvrir certains éléments qui nous auraient échappés. L'extension de l'analyse factorielle d'opérateurs que nous proposons est une nouvelle technique qui nous permet justement de récupérer une certaine quantité de cette information qui était jadis considérée comme perdue. Notons par contre que cette nouvelle analyse ne se veut en aucun point être une méthode alternative à STATIS. Au contraire, l'extension de l'analyse factorielle d'opérateurs est tout simplement une méthode complémentaire.

Alors, puisque les fondements de cette nouvelle technique reposent sur la méthode d'analyse conjointe de tableaux quantitatifs, nous nous proposons de scinder le contenu de ce chapitre en deux parties. La première partie nous permettra alors d'exposer la théorie entourant la méthode d'analyse factorielle d'opérateurs, tandis que la seconde sera utilisée afin de définir le concept de l'extension de l'analyse factorielle d'opérateurs que nous proposons ainsi que la théorie sous-jacente à cette dernière.

Notons enfin qu'à l'intérieur de ce chapitre nous allons illustrer les principaux objectifs de ces méthodes en faisant référence à l'exemple pratique suivant : on considère l'étude du comportement de cinquante actions boursières d'entreprises canadiennes sur une période de

quinze ans. Les actions boursières représentent les "individus" tandis que les variables sont le volume annuel des transactions, le prix moyen de l'action, la variation lors de la dernière période, etc. Un tableau résume alors, pour une année donnée, la ventilation des différents critères boursiers (variables) de chaque action (individus).

## **2.1 Analyse factorielle d'opérateurs**

La méthode d'analyse des données STATIS nous propose trois types d'approches : l'interstructure, l'intrastructure et les trajectoires. L'interstructure analyse l'évolution globale du phénomène de l'étude en tenant compte de tous les tableaux. L'intrastructure analyse la structure des individus à l'intérieur d'un même tableau. Afin d'effectuer cette analyse, nous devons d'avoir un individu représentatif. Nous allons donc étudier l'individu "baromètre" d'un tableau, un individu qui représente la tendance moyenne. Le tableau comprenant cet individu "imaginaire" ainsi que les autres individus "moyens" est appelé le compromis. Une fois cette étape effectuée, nous pourrions analyser l'intrastructure. Finalement, les trajectoires nous amène à suivre un individu à travers les tableaux et par le fait même, de prédire quel pourrait être son "état" au prochain tableau. En résumé, la méthode STATIS est une extension de l'analyse des données à un ensemble plus général que peuvent l'être des ensembles d'individus ou de variables.

Nous nous proposons donc dans la suite de cette première partie de présenter chacun de ces principaux aspects de la méthode STATIS de façon plus détaillée.

### **2.1.1 Interstructure – Opérateur caractéristique**

L'objectif de l'interstructure est de comparer globalement les  $T$  tableaux de données en les représentant par  $T$  points dans une (ou plusieurs) image(s) euclidienne(s) plane(s). Son utilisation nous permet alors de déceler les proximités et les différences entre les tableaux, sans cependant pouvoir donner de description fine des éléments qui les différencient. Afin de

concrétiser ce que représente cette analyse, reprenons l'exemple introduit précédemment concernant les actions boursières d'entreprises canadiennes. Cette étude économique porte sur quinze tableaux croisant les cinquante actions boursières et les différentes variables et où chaque tableau représente une année particulière. L'interstructure permet alors de repérer quelles sont les années dont le portrait boursier est similaire ainsi que celles où le portrait diffère. De plus, par l'entremise de cette analyse on peut vérifier si l'évolution des tableaux au cours des années est régulière ou non. Bref, l'interstructure permet de faire une analyse globale de l'étude en question.

Nous allons maintenant faire l'étude de l'interstructure en utilisant la notion d'opérateur que nous avons introduite au chapitre précédent. On considère tout d'abord une famille  $\{\Gamma_i\}$   $i=1,2,\dots,k$  d'opérateurs symétriques définis sur un même espace hilbertien  $E$  et soit  $u=(u_1, u_2, \dots, u_k)$  un vecteur de  $\mathbb{R}^k$ . On définit l'opérateur  $u \cdot \Gamma$  de  $E$  de la façon suivante :

$$\forall x \in E \quad (u \cdot \Gamma)(x) = \sum_{i=1}^k u_i \Gamma_i(x)$$

$u \cdot \Gamma$  est symétrique. En effet :

$$\begin{aligned} \forall x \in E, \forall y \in E \quad \pi((u \cdot \Gamma)(x), y) &= \sum_{i=1}^k u_i \pi(\Gamma_i(x), y) \\ &= \sum_{i=1}^k u_i \pi(x, \Gamma_i(y)) \\ &= \pi(x, (u \cdot \Gamma)(y)) \end{aligned}$$

On définit l'application  $F : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  par :

$$\forall u \in \mathbb{R}^k, \forall v \in \mathbb{R}^k \quad F(u, v) = \langle u \cdot \Gamma, v \cdot \Gamma \rangle_{H.S.}$$

$(\langle \cdot, \cdot \rangle_{H.S.})$  est défini à la section 1.3.2)

Cette application est évidemment une application bilinéaire symétrique.



Ainsi, si on procède comme en analyse en composantes principales, on peut définir pour un  $u \in \mathbb{R}^k$  donné la forme linéaire  $F_u$  comme suit :

$$\forall v \in \mathbb{R}^k \quad F_u(v) = F(u, v)$$

Les espaces  $\mathbb{R}^k$  et  $\mathbb{R}^{k*}$  étant isomorphes, il existe un vecteur unique  $\sigma(u) \in \mathbb{R}^k$  tel que :

$$\forall v \in \mathbb{R}^k \quad \sigma(u) \cdot v = F(u, v) = \langle u \cdot \Gamma, v \cdot \Gamma \rangle_{H.S.}$$

### Définition 2.1

L'application  $\sigma$  définie ci-dessus porte le nom d'opérateur caractéristique de la famille  $\{\Gamma_i\}$   $i=1,2,\dots,k$  et conduit à la notion d'interstructure de celle-ci.

En raison du fait que :  $\sigma(u) \cdot v = F(u, v) = F(v, u) = \sigma(v) \cdot u$  et que :  $\sigma(u) \cdot v = F(u, v) \geq 0$ , il est aisé de voir que l'opérateur caractéristique est un opérateur symétrique défini positif de  $\mathbb{R}^k$ .

Comme en analyse en composantes principales, on cherchera les vecteurs propres et les valeurs propres de  $\sigma$  qui nous permettront de mettre en évidence les opérateurs principaux qui jouent le rôle des composantes principales introduites dans le premier chapitre. Les opérateurs principaux peuvent être déterminés en résolvant, de manière itérative et sous contraintes d'orthogonalités, le problème d'optimisation suivant :

$$\max_{\|u\|^2=1} \|u \cdot \Gamma\|_{H.S.}$$

Cette procédure correspond, de façon analogue, à la recherche des composantes principales d'un vecteur aléatoire. En conséquence, elle donne lieu à la recherche des vecteurs propres unitaires de l'opérateur caractéristique associés aux valeurs propres de ce dernier et rangées par ordre décroissant.

### Définition 2.2

On appelle opérateurs principaux les opérateurs  $O_h$   $h=1,2,\dots,q$  ( $q \leq k$ ) définis sur  $E$  par :

$$O_h = u_h \cdot \Gamma$$

où le vecteur  $u_h = (u_h^1, u_h^2, \dots, u_h^k)$  est le vecteur propre unitaire de l'opérateur  $\sigma$  associé à la valeur propre  $\lambda_h$  où  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_h \geq \dots \geq \lambda_k > 0$ .

### Théorème 2.1

Les opérateurs  $\{O_h / \sqrt{\lambda_h}\}$  forment une base orthonormée du sous-espace de  $\mathcal{L}(E)$  engendré par la famille  $\{\Gamma_i\}$   $i=1,2,\dots,k$ .

Démonstration :

Considérons deux opérateurs principaux  $O_h$  et  $O_\ell$ . On a :

$$\begin{aligned} \langle O_h, O_\ell \rangle_{H.S.} &= \langle u_h \cdot \Gamma, u_\ell \cdot \Gamma \rangle_{H.S.} \\ &= \sigma(u_h) \cdot u_\ell \end{aligned}$$

Puisque  $u_h$  est un vecteur propre de l'opérateur  $\sigma$  associé à la valeur propre  $\lambda_h$ , il s'ensuit que  $\sigma(u_h) = \lambda_h u_h$  et donc :

$$\langle O_h, O_\ell \rangle_{H.S.} = \lambda_h u_h \cdot u_\ell$$

On obtient alors, en vertu de l'orthonormalité des vecteurs propres  $u_h$   $h=1,2,\dots,q$  que :

$$\langle O_h, O_\ell \rangle_{H.S.} = \begin{cases} \lambda_h & \text{si } h = \ell \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi les opérateurs  $O_h$   $h=1,2,\dots,q$  constituent une famille orthogonale (donc linéairement indépendante) dont la norme de chacun des éléments est donnée par :

$$\|O_h\|_{H.S.} = \sqrt{\lambda_h} \quad h=1,2,\dots,q.$$

On en déduit donc que les opérateurs  $\{O_h / \sqrt{\lambda_h}\}$  forment une base orthonormée.

Il faut maintenant montrer que les opérateurs  $O_h$  forment une base du sous-espace engendré par les  $\Gamma_i$   $i=1,2,\dots,k$ .

La famille  $\{O_h/\sqrt{\lambda_h}\}$  étant orthonormée,  $\Gamma_i$  s'exprime sous la forme d'une combinaison linéaire (non nulle) de ses éléments. Puisque  $O_h/\sqrt{\lambda_h}$  est de norme unité, la projection de  $\Gamma_i$  sur ce dernier est donnée par :

$$\begin{aligned} \left\langle \Gamma_i, \frac{O_h}{\sqrt{\lambda_h}} \right\rangle_{H.S.} &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_h}} \langle (e_i \cdot \Gamma), (u_h \cdot \Gamma) \rangle_{H.S.} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_h}} (e_i \cdot \sigma(u_h)) \\ &= \sqrt{\lambda_h} u_h^i \end{aligned}$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} \Gamma_i &= \sum_{h=1}^k \left\langle \Gamma_i, \frac{O_h}{\sqrt{\lambda_h}} \right\rangle_{H.S.} \frac{O_h}{\sqrt{\lambda_h}} \\ &= \sum_{h=1}^k (\sqrt{\lambda_h} u_h^i) \frac{O_h}{\sqrt{\lambda_h}} \\ &= \sum_{h=1}^k u_h^i O_h \end{aligned}$$

□

### Définition 2.3

On appelle interstructure de la famille  $\{\Gamma_i\}$   $i=1,2,\dots,k$  le spectre de son opérateur caractéristique.

L'étude de l'interstructure que nous avons définie dans les paragraphes précédents est en fait l'étude de l'interstructure non centrée puisque nous n'avons fait aucune hypothèse sur l'opérateur caractéristique  $\sigma$ . Par conséquent, il est intéressant de noter que les résultats établis

précédemment demeurent valables lorsque l'opérateur  $\sigma$  est centré. En effet, en centrant l'opérateur caractéristique on obtient une image euclidienne dans laquelle l'origine est le centre de gravité des opérateurs  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$ . Cette technique, que l'on appelle aussi interstructure centrée, possède ainsi l'avantage de faire apparaître les proximités et les oppositions entre les opérateurs  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$ .

Ceci termine cette première section consacrée à l'analyse globale de l'ensemble des tableaux. L'analyse de l'interstructure ayant mis en évidence, sans les expliquer, les ressemblances et les différences entre les tableaux étudiés, il s'avère maintenant intéressant de poursuivre notre étude de la méthode STATIS en portant notre attention à l'étude d'un tableau spécifique. Pour ce faire, il importe de déterminer un tableau "moyen" qui pourrait bien représenter l'ensemble des tableaux. Ce tableau, que l'on appelle le tableau compromis ou encore plus simplement "compromis", est l'objet de la prochaine section.

### **2.1.2 Compromis**

Il est classique d'associer à un unique tableau de données un ensemble de représentations graphiques, en utilisant des méthodes d'analyse des données décrites au chapitre précédent, qui permettent de reconnaître et de montrer des tendances essentielles des phénomènes étudiés. Par ailleurs, si on dispose de plusieurs tableaux de données, on peut envisager dans un premier temps de les analyser indépendamment les uns des autres. Cependant, on risque d'être rapidement submergé par les nombreux ensembles de représentations à analyser. C'est pourquoi nous sommes amenés à chercher un ensemble unique de représentations dont on dira qu'il constitue un résumé global, ou encore un "compromis" de l'ensemble des tableaux.

Le calcul du compromis est en fait une étape essentielle dans l'étude des individus à l'intérieur d'un même tableau, que l'on appelle aussi intrastructure. Ainsi, l'objectif de cette section est de définir brièvement ce que représente le compromis afin de faciliter la compréhension des deux prochaines sections qui introduiront deux cas spécifiques de ce dernier.

Comme on le verra plus tard, le compromis est l'équivalent de la première composante principale en analyse factorielle d'opérateurs. De plus, étant donné qu'à partir de maintenant on considérera la famille  $\{\Gamma_i\}$   $i=1,2,\dots,k$  comme étant constituée d'opérateurs symétriques semi-définis et positifs, cela lui confère une propriété supplémentaire qui est donnée par le théorème suivant :

### Théorème 2.2

Si les opérateurs  $\{\Gamma_i\}$   $i=1,2,\dots,k$  sont symétriques et positifs, le premier opérateur principal peut être choisi symétrique et positif. (Résultat plus connu sous le nom de théorème de Frobenius)

Démonstration :

La démonstration relative à la symétrie étant simple, nous n'allons démontrer que la positivité du premier opérateur principal.

La démonstration que nous en donnons repose sur une propriété des opérateurs symétriques positifs:

$$\forall i = 1, 2, \dots, k \quad \text{et} \quad \forall j = 1, 2, \dots, k \quad \langle \Gamma_i, \Gamma_j \rangle_{H.S.} \geq 0 \quad (\text{voir théorème 1.8})$$

Soit  $u_1$  le vecteur propre unitaire de  $\mathbb{R}^k$  associé à la plus grande valeur propre  $\lambda_1$  de l'opérateur caractéristique  $\sigma$ , on a :

$$O_1 = \sum_{i=1}^k u_1^i \Gamma_i$$

En considérant la norme Hilbert-Schmidt il vient :

$$\|O_1\|_{H.S.}^2 = \sum_{i=1}^k (u_1^i)^2 \|\Gamma_i\|_{H.S.}^2 + \sum_{i \neq j} u_1^i u_1^j \langle \Gamma_i, \Gamma_j \rangle_{H.S.}$$

On considère le vecteur  $v_1$  de  $\mathbb{R}^k$  défini de la façon suivante :

$$\forall i = 1, 2, \dots, k \quad v_1^i = |u_1^i|$$

Le vecteur  $v_1$  est unitaire et l'on a :

$$\left\| \sum_{i=1}^k v_1^i \Gamma_i \right\|_{H.S.}^2 = \sum_{i=1}^k (v_1^i)^2 \|\Gamma_i\|_{H.S.}^2 + \sum_{i \neq j} v_1^i v_1^j \langle \Gamma_i, \Gamma_j \rangle_{H.S.}$$

D'après la définition du vecteur  $v_1$ , on a :

$$\forall i = 1, 2, \dots, k \quad \text{et} \quad \forall j = 1, 2, \dots, k \quad v_1^i v_1^j = |u_1^i u_1^j| \geq u_1^i u_1^j$$

Les produits scalaires  $\langle \Gamma_i, \Gamma_j \rangle_{H.S.}$  étant tous positifs ou nuls, on obtient :

$$\left\| \sum_{i=1}^k v_1^i \Gamma_i \right\|_{H.S.}^2 \geq \|O_1\|_{H.S.}^2$$

Or l'opérateur  $O_1$  étant de norme maximale sous la contrainte  $\|u_1\|^2 = 1$ , les vecteurs  $u_1$  et  $v_1$  sont égaux au signe près si  $\lambda_1$  est une valeur propre simple et donc toutes les composantes de  $u_1$  sont de même signe. Dans le cas où  $\lambda_1$  est une valeur propre multiple,  $v_1$  est un vecteur propre associé. On peut donc considérer  $u_1 = v_1$ . Il apparaît alors que l'opérateur  $O_1$  est une combinaison linéaire des opérateurs  $\Gamma_i$  dont les coefficients sont positifs ou nuls. Par conséquent,  $O_1$  est positif puisque les opérateurs  $\Gamma_i$   $i=1, 2, \dots, k$  le sont.

□

#### Définition 2.4

On appelle opérateur compromis de la famille  $\{\Gamma_i\}$   $i=1, 2, \dots, k$  l'opérateur

$$\Gamma_c = u_c \cdot \Gamma = \sum_{i=1}^k u_c^i \Gamma_i$$

où  $u_c = u_1 / \sum_{i=1}^k u_1^i$  est le vecteur propre associé à la plus grande valeur propre de l'opérateur caractéristique, dont les coordonnées sont positives ou nulles et de somme 1.

Le coefficient de normalisation  $\sum_{i=1}^k u_c^i$  est choisi afin que le compromis soit un objet de même nature que les objets intervenants dans sa construction. En particulier, si les  $\Gamma_i$  sont égaux, il est logique de penser que  $\Gamma_c$  doit être égal à l'un des  $\Gamma_i$  quelconques. Il existe d'autres façons de normaliser pour obtenir l'opérateur compromis dont, entre autres, celle d'imposer que la norme du compromis soit la moyenne des normes des  $\Gamma_c$ . C'est cette dernière méthode qui sera utilisée dans le prochain chapitre.

Ayant défini l'opérateur compromis de façon générale, il s'avère maintenant plus aisé d'aborder la prochaine section concernant l'analyse de l'intrastructure.

### 2.1.3 Intrastructure

L'idée essentielle de la méthode STATIS est la recherche d'une structure commune aux tableaux. En fait, l'analyse de l'interstructure ne suffit pas puisqu'elle ne permet d'expliquer ni les ressemblances, ni les différences entre les tableaux. Cet objectif est atteint grâce à une procédure que l'on appelle analyse ou étude de l'intrastructure.

Le compromis que l'on a défini à la section précédente va nous permettre de représenter les positions-compromis des individus tels qu'ils sont décrits par l'ensemble des tableaux. On obtient alors l'image euclidienne compromis. Les positions-compromis correspondent à des positions moyennes des individus sur la période considérée.

Lorsque les distances entre tableaux déterminées dans l'interstructure sont faibles, on est en mesure d'affirmer qu'il existe effectivement une structure des individus commune aux tableaux. Cette structure est alors décrite par les distances compromis entre individus.

Comme dans le cas d'une analyse en composantes principales, les axes du plan principal compromis seront interprétés en étudiant les corrélations des variables avec les axes du compromis. Les positions-compromis des individus pourront alors être interprétées.

Afin de mieux illustrer ce que représente l'analyse de l'intrastructure, reprenons notre exemple introductif concernant les actions boursières d'entreprises canadiennes. Cette étude économique porte sur quinze tableaux croisant les cinquante actions boursières et les différentes variables et où chaque tableau représente une année particulière. L'intrastructure permet alors de faire l'étude du comportement d'une action boursière pour une année donnée par rapport à "l'action moyenne". De plus, elle nous permet de repérer quelles sont les actions boursières qui sont proches ou éloignées par rapport aux variables correspondantes des différentes années (tableaux). Bref, l'intrastructure nous permet de faire une analyse plus fine de l'étude en question.

Nous nous proposons alors de présenter dans cette troisième section l'étude de l'intrastructure selon deux approches différentes. On débutera la première sous-section en adoptant l'optique de l'opérateur de covariance. Ceci nous permettra de définir le compromis comme un opérateur de covariance, de développer l'intrastructure proprement dite et de terminer avec l'étude des composantes principales de l'opérateur compromis. Par la suite, on utilisera une approche similaire dans la deuxième sous-section afin de développer la théorie concernant l'intrastructure mais cette fois-ci, basé sur l'opérateur de produit scalaire.

#### ***2.1.3.1 Opérateurs de covariance***

On suppose à l'intérieur de cette sous-section que nous sommes dans le cas particulier où les opérateurs  $\{\Gamma_i\}$   $i=1,2,\dots,k$  sont les opérateurs de covariance d'un même vecteur aléatoire  $X=(X_1,\dots,X_j,\dots,X_p)$  défini sur des populations différentes  $\{I_i\}$   $i=1,2,\dots,k$  que nous supposons finies. Notons que ce type d'opérateur est utilisé lorsque l'on est en présence d'un même groupe de variables portant sur des groupes différents d'observations.



### 2.1.3.1.1 Compromis

Nous allons interpréter le compromis comme l'opérateur de covariance du vecteur aléatoire  $X$  défini sur un espace probabilisé particulier. À cette fin posons :

$$I = \bigcup_{i=1}^k I_i \quad \text{avec} \quad \forall i = 1, 2, \dots, k \quad \text{et} \quad \forall \omega_j \in I_i \quad P(\omega_j) = P(\omega_j \in I) = u_c^i P_i(\omega_j)$$

où  $P_i(\omega_j)$  est la probabilité que l'individu  $\omega_j$  appartienne à la population  $I_i$  supposée finie.

En ayant recours à la représentation matricielle des opérateurs de covariance ( $\Gamma = VM$ ) et en se rappelant que la matrice de variance-covariance totale  $V_T$  (variables centrées sur  $I$ ) est égale à la somme des matrices de variance-covariance interclasse  $V_G$  et de variance-covariance

intraclasse  $V_I = \sum_{i=1}^k u_c^i V_i$  il vient :

$$\Gamma_T = \Gamma_G + \Gamma_I \quad \text{où} \quad \Gamma_I = \sum_{i=1}^k u_c^i \Gamma_i$$

Ce résultat nous permet donc d'énoncer le théorème suivant :

### Théorème 2.3

Le compromis  $\Gamma_c$  est égal à l'opérateur de covariance intraclasse du vecteur aléatoire  $X$  défini sur l'espace probabilisé  $(I, \wp(I), P)$  où  $\wp(I)$  représente l'ensemble des parties de  $I$  et  $P$  la mesure de probabilité définie sur ce même ensemble.

### 2.1.3.1.2 Intrastructure

On se propose de représenter les variables aléatoires  $X_j$   $j=1, 2, \dots, p$  par  $k+1$  points, le premier correspondant à l'opérateur compromis  $\Gamma_c$  et à l'espace  $(I, \wp(I), P)$  et les suivants aux opérateurs  $\Gamma_i$  et aux espaces  $(I_i, \wp(I_i), P_i)$ .

La simple superposition des représentations graphiques obtenues en effectuant les analyses en composantes principales des opérateurs  $\Gamma_c$  et  $\Gamma_i$   $i=1,2,\dots,k$  est difficilement interprétable : la difficulté est due au fait que les axes ne sont pas nécessairement les mêmes. Il est donc nécessaire de mettre au point une procédure conduisant à une représentation simultanée.

Les variables aléatoires  $X_j$   $j=1,2,\dots,p$  engendrent un sous-espace  $F$  de  $L^2(\Omega)$ . Les composantes principales de l'opérateur  $\Gamma_c$  constituent une base de  $F$  et l'on note :

- $C_h$   $h=1,2,\dots,q$  : composantes principales du compromis
- $u_h$   $h=1,2,\dots,q$  : vecteurs propres (ou axes principaux d'inertie) où  $q \leq p$
- $\lambda_h$   $h=1,2,\dots,q$  : valeurs propres

L'espace  $\mathbb{R}^p$  étant muni de la métrique  $\pi$ , on a  $\forall h=1,2,\dots,q$   $C_h = u_h \cdot X$ . Dans l'analyse en composantes principales du compromis, les coordonnées des variables  $X_j$  sont leurs covariances avec les composantes principales normalisées, ainsi :

$$\forall j=1,2,\dots,p \quad X_j = \sum_{h=1}^q \text{Cov}(X_j, C'_h) C'_h \quad \text{où } C'_h = C_h / \sqrt{\lambda_h}$$

Afin de particulariser les variables  $X_j$  suivant les populations  $I_1, I_2, \dots, I_k$ , on détermine leurs covariances avec les composantes principales  $C'_h$  en considérant leurs restrictions aux populations  $I_i$   $i=1,2,\dots,k$ . On pose alors :

$$\forall i=1,2,\dots,k \quad \text{et} \quad \forall j=1,2,\dots,p \quad X_j^i = \sum_{h=1}^q \text{Cov}_{I_i}(X_j, C'_h) C'_h$$

$$\text{où } \text{Cov}_{I_i}(X_j, C'_h) = \text{Cov}_{I_i}(e_j \cdot X, (u_h \cdot X) / \sqrt{\lambda_h}) = \frac{1}{\lambda_h} \Gamma_i(e_j) \cdot u_h$$

Ainsi dans le même repère  $\{C'_h\}$   $h=1,2,\dots,q$  ( $q \leq p$ ) on peut représenter  $X_j$  et  $X_j^i$   $i=1,2,\dots,k$  afin de nous permettre de comparer les populations entre elles. La proximité des points représentatifs d'une même variable pour deux populations différentes signifie que les covariances avec les composantes principales ne varient guère d'une population à l'autre. On peut d'ailleurs énoncer le résultat suivant :

#### Théorème 2.4

La variable  $X_j$  est la moyenne des variables  $X_j^i$   $i=1,2,...,k$  pondérée par les coefficients  $u_c^i$ .

Démonstration :

On sait que l'opérateur compromis s'exprime comme suit :  $\Gamma_c = \sum_{i=1}^k u_c^i \Gamma_i$

Alors, il vient :

$$\begin{aligned} X_j &= \sum_{h=1}^q \text{Cov}(X_j, C_h') C_h' \\ &= \sum_{h=1}^q \text{Cov}\left(e_j \cdot X, \frac{(u_h \cdot X)}{\sqrt{\lambda_h}}\right) \\ &= \sum_{h=1}^q \frac{1}{\sqrt{\lambda_h}} [\Gamma_c(e_j) \cdot u_h] C_h' \\ &= \sum_{h=1}^q \frac{1}{\sqrt{\lambda_h}} \left[ \left( \sum_{i=1}^k u_c^i \Gamma_i \right) (e_j) \cdot u_h \right] C_h' \\ &= \sum_{i=1}^k u_c^i \left[ \sum_{h=1}^q \frac{1}{\sqrt{\lambda_h}} (\Gamma_i(e_j) \cdot u_h) C_h' \right] \\ &= \sum_{i=1}^k u_c^i \left[ \sum_{h=1}^q \text{Cov}_{I_i}(X_j, C_h') C_h' \right] \\ &= \sum_{i=1}^k u_c^i X_j^i \end{aligned}$$

□

#### 2.1.3.1.3 Composantes principales

La démarche précédente peut être utilisée pour représenter toute combinaison linéaire des variables  $X_j$   $j=1,2,...,p$ , et donc en particulier les composantes principales du compromis. Cette représentation peut être intéressante puisqu'elle peut mettre en évidence leur

stabilité éventuelle : l'interprétation des proximités entre deux points  $X_j^i$  et  $X_j^{i'}$  peut en être facilitée. En effet, reprenons l'expression définissant  $X_j^i$  :

$$X_j^i = \sum_{h=1}^q \text{Cov}_{I_i}(C_h', X_j) C_h'.$$

La stabilité des covariances mise en évidence par la proximité de deux points  $X_j^i$  et  $X_j^{i'}$  dépend de celle de la composante principale  $C_h'$  et de la variable  $X_j$ . Il est donc indispensable d'étudier la stabilité des composantes principales. En notant par  $C_m^i$  la  $m^e$  composante principale restreinte à la population  $I_i$ , on a :

$$C_m^i = \sum_{h=1}^q \frac{1}{\sqrt{\lambda_h}} [\Gamma_i(u_m) \cdot u_h] C_h'$$

### Définition 2.5

On appelle infrastructure d'une famille d'opérateurs de covariance  $\{\Gamma_i\}$   $i=1,2,\dots,k$  l'ensemble des variables et des composantes principales du compromis et leurs restrictions à chaque population  $I_i$   $i=1,2,\dots,k$ .

#### 2.1.3.2 Opérateurs de produit scalaire

Dans le cadre de cette deuxième sous-section, on suppose que la famille étudiée est constituée d'opérateurs de produits scalaires  $\Psi_h$   $h=1,2,\dots,k$  définis à partir des vecteurs aléatoires  $X^h$   $h=1,2,\dots,k$  à valeurs dans les espaces euclidiens  $(\mathbb{R}^{p_h}, \pi_h)$   $h=1,2,\dots,k$ . L'espace probabilisé est le même pour tous les vecteurs aléatoires et les opérateurs  $\Psi_h$   $h=1,2,\dots,k$  sont donc définis sur  $L^2(\Omega)$ . Ce type d'opérateur est utilisé lorsque l'on est en présence d'un même ensemble d'individus portant sur des groupes de variables différents.

### 2.1.3.2.1 Compromis

Désignons par  $\Psi_c = u_c \cdot \Psi$  le compromis de la famille  $\{\Psi_h\}_{h=1,2,\dots,k}$  et posons :

$$\begin{aligned}
 p &= \sum_{h=1}^k p_h \\
 Z &= (\underbrace{X_1^1, \dots, X_{p_1}^1}_{X^1}, \dots, \underbrace{X_1^h, \dots, X_{p_h}^h}_{X^h}, \dots, \underbrace{X_1^k, \dots, X_{p_k}^k}_{X^k}) \in \mathbb{R}^p \\
 u &= (\underbrace{u_1^1, \dots, u_{p_1}^1}_{u^1}, \dots, \underbrace{u_1^h, \dots, u_{p_h}^h}_{u^h}, \dots, \underbrace{u_1^k, \dots, u_{p_k}^k}_{u^k}) \in \mathbb{R}^p \\
 v &= (\underbrace{v_1^1, \dots, v_{p_1}^1}_{v^1}, \dots, \underbrace{v_1^h, \dots, v_{p_h}^h}_{v^h}, \dots, \underbrace{v_1^k, \dots, v_{p_k}^k}_{v^k}) \in \mathbb{R}^p
 \end{aligned}$$

On définit le produit scalaire  $\pi$  sur  $\mathbb{R}^p$  de la façon suivante :

$$\pi(u, v) = u \cdot v = \sum_{h=1}^k u_c^h \pi_h(u^h, v^h)$$

où  $\pi_h$  représente le produit scalaire entre  $u^h$  et  $v^h$  défini sur  $\mathbb{R}^{p_h}$ .

### Théorème 2.5

L'opérateur compromis  $\Psi_c = u_c \cdot \Psi$  est l'opérateur de produit scalaire du vecteur aléatoire  $Z$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^p$  muni de la métrique  $\pi$ .

Démonstration :

En désignant par  $\Psi_z$  l'opérateur de produit scalaire du vecteur aléatoire  $Z$  on a :

$$\begin{aligned}
 \forall Y \in L^2(\Omega) \quad \Psi_z(Y) &= E(YZ) \cdot Z \\
 &= \sum_{h=1}^k u_c^h \pi_h(E[YX^h], X^h) \\
 &= \sum_{h=1}^k u_c^h \Psi_h(Y)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[ \sum_{h=1}^k u_c^h \Psi_h \right] (Y) \\
&= \Psi_c(Y)
\end{aligned}$$

Donc, on en déduit que  $\Psi_z = \Psi_c$ .

□

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le parallèle existant entre le cas de l'opérateur de covariance et celui de l'opérateur de produit scalaire.

- À la juxtaposition des individus repérés par les mêmes variables accompagnée d'une définition appropriée de la probabilité sur la population I obtenue correspond l'opérateur de covariance :

$$\Gamma_c = \sum_{i=1}^k u_c^i \Gamma_i$$

- À la juxtaposition des variables accompagnée d'une définition appropriée d'une métrique sur  $\mathbb{R}^p$  correspond l'opérateur de produit scalaire :

$$\Psi_c = \sum_{h=1}^k u_c^h \Psi_h$$

#### 2.1.3.2.2 Intrastructure

De façon similaire à ce que l'on a fait dans le cas des opérateurs de covariance, on cherche une représentation simultanée des individus de la population. Pour ce faire, on se propose de reconstruire les composantes principales  $C_\ell$   $\ell=1,2,\dots,q$  du compromis par chaque vecteur  $X^h$   $h=1,2,\dots,k$  et évidemment par le vecteur  $Z$ . Ainsi, pour chaque individu, on obtiendra  $k+1$  points. À cette fin on propose trois procédures.

i) 1<sup>ère</sup> méthode

On reconstruit la composante principale  $C_\ell$  du compromis par sa projection sur les composantes principales réduites  $C'_{m,h}$   $h=1,2,\dots,k$   $m=1,2,\dots,q_h$  du vecteur aléatoire  $X^h$ . Ainsi, on a :

$$C_\ell^h = \sum_{m=1}^{q_h} \text{Cov}(C_\ell, C'_{m,h}) C'_{m,h}$$

Notons cependant que l'on ne peut espérer obtenir une reconstitution exacte, même lorsque toutes les composantes principales  $C'_{m,h}$  du vecteur  $X^h$  sont prises en considération. En effet, on n'a qu'à remarquer que  $C_\ell$  est combinaison linéaire de toutes les variables  $X_{j_h}^h$   $h=1,2,\dots,k$   $j_h=1,2,\dots,p_h$  alors que  $C'_{m,h}$  est uniquement combinaison linéaire des variables  $X_1^h, X_2^h, \dots, X_{p_h}^h$ .

Par ailleurs, on observe que cette procédure est analogue à celle utilisée en régression pour comparer la valeur de la variable expliquée pour chaque individu (ici  $C_\ell$ ) à la valeur reconstruite ( $C_\ell^h$ ) à l'aide des variables explicatives ( $C'_{m,h}$ ).

Afin de représenter les individus on utilise les mêmes techniques qu'en analyse en composantes principales. Ainsi, en désignant par  $q$  le nombre de composantes principales retenues du compromis, on associe  $k+1$  vecteurs de  $\mathbb{R}^q$  à chaque individu  $\omega$ . Ces vecteurs sont obtenus comme suit :

- Le premier est obtenu directement à l'aide de l'opérateur compromis :

$$(C_1(\omega), C_2(\omega), \dots, C_q(\omega))$$

- Les  $k$  suivants donnent la reconstitution de ce vecteur pour chaque vecteur aléatoire  $X^h$  :

$$(C_1^h(\omega), C_2^h(\omega), \dots, C_q^h(\omega))$$

On obtient ainsi pour chaque individu des trajectoires permettant d'apprécier la "stabilité" de celui-ci par rapport à un "individu moyen" obtenu à l'aide du compromis.

ii) 2<sup>e</sup> méthode

Une autre façon de procéder consiste à considérer le fait que la composante principale  $C_\ell$  est vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda_\ell$  de l'opérateur compromis :

$$\forall \ell = 1, 2, \dots, q \quad C_\ell = \frac{1}{\lambda_\ell} \Psi_c(C_\ell)$$

De la même façon que dans le cas des opérateurs de covariance, on remplace  $\Psi_c$  par  $\Psi_h$   $h=1, 2, \dots, k$  pour trouver :

$$\forall \ell = 1, 2, \dots, q \quad \tilde{C}_\ell^h = \frac{1}{\lambda_\ell} \Psi_h(C_\ell)$$

Or, on sait que l'opérateur  $\Psi_h$  est la somme des projecteurs sur ces vecteurs propres pondérés par les valeurs propres associées :

$$\Psi_h = \sum_{m=1}^{q_h} \lambda_{m,h} P_{m,h} \quad \text{où } P_{m,h} \text{ désigne le projecteur sur la droite engendrée par le vecteur propre de } \Psi_h \text{ associé à la valeur propre } \lambda_{m,h}.$$

On a alors :

$$\Psi_h(C_\ell) = \sum_{m=1}^{q_h} \lambda_{m,h} \text{Cov}(C_\ell, C'_{m,h}) C'_{m,h}$$

où  $C'_{m,h}$  est la m<sup>e</sup> composante principale réduite de  $\Psi_h$ .

Ainsi, on en déduit que :

$$\tilde{C}_\ell^h = \frac{1}{\lambda_\ell} \sum_{m=1}^{q_h} \lambda_{m,h} \text{Cov}(C_\ell, C'_{m,h}) C'_{m,h}$$



Cette seconde procédure nous permet d'introduire une nouvelle interprétation de  $C_\ell$  par le biais du théorème qui suit.

### Théorème 2.6

La composante principale  $C_\ell$  du compromis  $\Psi_c$  est la moyenne des variables  $\tilde{C}_\ell^h$  pondérée par les coefficients  $u_c^h$   $h=1,2,\dots,k$ .

Démonstration :

On a défini à la section 2.1.3.2.1 l'opérateur compromis de la façon suivante :

$$\Psi_c = \sum_{h=1}^k u_c^h \Psi_h$$

Alors il vient :

$$\begin{aligned} \lambda_\ell C_\ell &= \Psi_c(C_\ell) \\ &= \left[ \sum_{h=1}^k u_c^h \Psi_h \right](C_\ell) \\ &= \sum_{h=1}^k u_c^h \Psi_h(C_\ell) \\ &= \sum_{h=1}^k u_c^h (\lambda_\ell \tilde{C}_\ell^h) \\ &= \lambda_\ell \sum_{h=1}^k u_c^h \tilde{C}_\ell^h \end{aligned}$$

Donc,

$$C_\ell = \sum_{h=1}^k u_c^h \tilde{C}_\ell^h$$

□

### iii) 3<sup>e</sup> méthode

Une dernière procédure envisagée est la méthode classique utilisée dans le programme STATIS (programme que nous utiliserons dans le prochain chapitre). Par cette méthode, on

cherche simplement à juxtaposer les points en effectuant des changements de base. Pour ce faire, on pose :

$$\tilde{C}_\ell^h = \sum_{m=1}^{q_h} \text{Corr}(C_\ell, C_{m,h}) C_{m,h}$$

où  $\text{Corr}(C_\ell, C_{m,h})$  représente les coordonnées des projections des  $C_\ell$  sur la nouvelle base  $C_{m,h}$ .

Cette démarche nous intéresse particulièrement puisqu'elle nous permet de comparer les structures de la population définies par les opérateurs de produits scalaires.

Enfin ceci met un terme à cette troisième section consacrée à l'analyse fine des différents tableaux à l'étude que l'on a appelé intrastructure. Comme on l'a constaté, l'analyse de l'intrastructure nous permet d'étudier les ressemblances ou les différences entre les éléments correspondants des différents tableaux. Par ailleurs, lorsque les différents tableaux étudiés sont indexés sur le temps, il est intéressant de décrire l'évolution du phénomène. Cet objectif peut être limité à une description de "l'évolution globale" du phénomène ou, au contraire, il peut consister en l'étude de l'évolution de chacun des éléments composant les tableaux. On parlera alors de "l'analyse des trajectoires" de ces éléments. Cette dernière analyse est en fait l'objet principal de la prochaine section.

#### 2.1.4 Trajectoires

Lorsque l'on dispose d'une suite de tableaux de données qui, plus souvent qu'autrement, sont indicés par le temps, nous sommes conduits à décrire l'évolution du phénomène étudié. L'étude de l'interstructure a mis en évidence les écarts entre les tableaux sans cependant les expliquer. C'est pour cette raison que l'on doit avoir recours à la technique des trajectoires afin de déceler quels sont les individus ou les variables responsables de ces écarts.

Il existe deux types de trajectoires nous permettant de faire l'analyse de chacun des éléments composant les tableaux : les trajectoires des individus et les trajectoires des variables. On utilise les trajectoires d'individus lorsque les T tableaux de mesure ont été recueillis en différentes occasions et sur les mêmes individus. D'autre part, les trajectoires des variables sont utilisées lorsque les mêmes variables ont été mesurées sur T groupes d'individus différents.

Dans la plupart des cas, nous sommes en présence des mêmes variables mesurées sur les mêmes individus en différentes occasions (le plus souvent à différentes dates). Alors, selon qu'on s'intéresse aux individus ou aux variables, on considère l'une ou l'autre des trajectoires présentées ci-dessus.

Afin de concrétiser la notion de trajectoire, reprenons notre exemple introductif concernant les cinquante actions boursières d'entreprises canadiennes étudiées sur une période de quinze années. Dans ce cas, la trajectoire d'un individu est la position d'une entreprise pour les quinze années par rapport à l'entreprise fictive "moyenne" qui est en fait le compromis. Cette étude nous permet alors de constater quelles sont les entreprises qui ont eu une évolution "moyenne" au cours des quinze dernières années et quelles sont celles qui se sont démarquées de la tendance générale. De plus, lorsque la distribution des points de la trajectoire présente certaines structures spécifiques, il est possible d'expliquer les axes du compromis et alors, d'interpréter de façon plus détaillée l'évolution d'une entreprise à travers les années par rapport à ces axes dont on connaît la signification. Par ailleurs, puisque cette étude porte sur des variables mesurées sur les mêmes entreprises et ce, annuellement, on peut faire une interprétation similaire en considérant les variables au lieu des entreprises et ainsi obtenir une analyse des trajectoires des variables. Bref, l'analyse des trajectoires nous permet de décrire les écarts entre les tableaux en identifiant les individus ou les variables qui en sont responsables.

Nous nous proposons alors dans cette dernière section de présenter de façon générale certains éléments qui entourent les trajectoires ainsi que les diverses interprétations qui peuvent en

découler. Étant donné que les deux types de trajectoires introduits précédemment se traitent de façon très similaire, nous avons choisi d'exposer uniquement l'analyse des trajectoires des individus, l'extrapolation à l'analyse des trajectoires des variables étant relativement simple. Le lecteur qui désire approfondir cette étude de l'analyse des trajectoires pourra consulter LAVIT [11].

#### ***2.1.4.1 Généralités***

On a pris l'habitude d'utiliser le terme "trajectoire" car le plus souvent, les données décrivent un phénomène évolutif. Notons cependant que cette technique s'applique tout aussi bien à des données non temporelles.

La représentation des trajectoires se fait dans l'image euclidienne compromise qui, en général, est limitée aux deux premières dimensions. L'objectif est de représenter sur cette même image les  $T$  nuages d'individus (respectivement les variables), le  $i^{\text{e}}$  nuage étant défini par les variables (respectivement les individus) du  $i^{\text{e}}$  tableau. On aura ainsi une représentation de  $nT$  points, soit  $n$  trajectoires de  $T$  points puisque  $n$  est le nombre d'individus. Les différentes positions d'un individu définissent sa trajectoire. La méthode utilisée rappelle la technique des points supplémentaires, telle qu'habituellement utilisée en analyse des données multidimensionnelle. Pour de plus amples informations à ce sujet le lecteur pourra consulter BENZECRI [2].

#### ***2.1.4.2 Interprétation du sens de parcours d'une trajectoire***

Les trajectoires s'interprètent par rapport à l'évolution moyenne, c'est-à-dire par rapport à l'évolution d'un individu fictif moyen qui aurait pour valeurs les moyennes des variables de chaque tableau. Les variables étant centrées dans chaque tableau, la trajectoire de cet individu moyen est réduite à un point qui est à l'origine du plan.

En ce qui concerne la forme des trajectoires, il est possible de distinguer deux types : une trajectoire peu étendue, concentrée près du compromis ou une trajectoire de grande amplitude. Dans le premier cas, ce type de trajectoire correspond à un individu dont l'évolution suit l'évolution moyenne. Cela signifie que, pour chaque variable, l'écart entre la variable pour cet individu et la moyenne est régulier d'une période donnée à l'autre. À l'inverse, une trajectoire de grande amplitude reflète un changement de structure de l'individu au cours des périodes, différent de l'évolution moyenne.

D'autre part, on peut interpréter de façon plus détaillée les trajectoires des individus lorsque les points se regroupent nettement par variable sur le graphique des corrélations des variables avec les axes du compromis. Ce cas se rencontre fréquemment puisque les variables sont souvent fortement auto-corrélées dans les différentes études. Il est alors facile, en général, d'expliquer les axes du compromis en fonction des variables et d'interpréter le sens de parcours d'une trajectoire le long d'un axe dont on connaît la signification.

À l'opposé, lorsque les corrélations entre les variables à l'intérieur d'un même tableau sont fortes, les points du graphique des corrélations se regroupent plutôt par étude que par variable. Il est alors difficile de décrire les axes en fonction des variables et d'interpréter les trajectoires.

#### ***2.1.4.3 Individus supplémentaires***

Les éventuels individus placés en supplémentaire n'interviennent pas, par définition, dans la détermination de l'intrastructure ni dans la définition du compromis. Ainsi, leur position n'existe pas.

Si un individu est absent de certaines études, on peut le placer tout de même dans l'image euclidienne compromis. Pour cela, on le traite comme un individu supplémentaire et on calcule les coordonnées des points de sa trajectoire correspondant aux études dans lesquelles il est présent.

C'est sur cette dernière remarque que se termine la première partie de ce second chapitre. Celle-ci nous ayant permis de couvrir l'essentiel de la théorie entourant la méthode d'analyse des données évolutives STATIS, nous allons maintenant présenter le résultat principal de ce mémoire. Nous nous proposons alors, dans la deuxième partie de ce chapitre, de présenter une extension de l'analyse factorielle d'opérateurs.

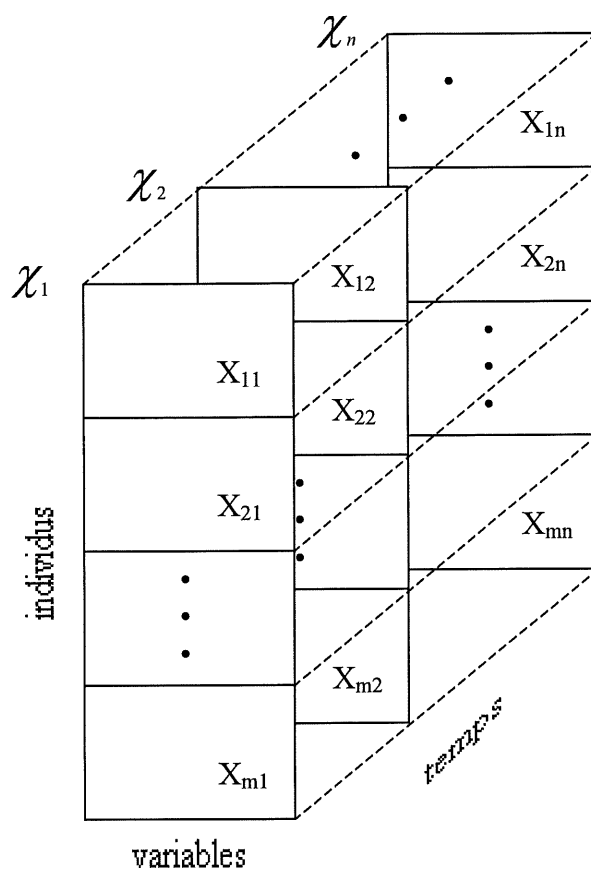
## **2.2 Extension de l'analyse factorielle d'opérateurs**

Jusqu'à présent nous avons présenté un ensemble de méthodes statistiques que l'on peut retrouver dans les manuels d'analyse de données multidimensionnelles tels que SAPORTA [15], DAZY et LE BARZIC [3], FOUCART [6] et LAVIT [11].

Afin de décrire adéquatement le concept ainsi que la théorie se rattachant à cette extension, nous avons subdivisé cette deuxième partie en deux sections. La première section nous permettra d'établir le concept général de la méthode tandis que la seconde section servira à la présentation de la théorie nécessaire à la formalisation de ce concept.

### **2.2.1 Conceptualisation de la méthode**

L'extension de l'analyse factorielle d'opérateurs a comme principal objectif de nous permettre d'augmenter la richesse de l'information que l'on peut extraire d'un ensemble de données multidimensionnelles. La conceptualisation de ce prolongement est considérablement simplifiée par la présentation de la figure suivante :



**Figure 5 : Structure des données dans l'extension de l'analyse factorielle d'opérateur**

Remarquons tout d'abord qu'en faisant abstraction des  $X_{ij}$   $i=1,2,\dots,m$   $j=1,2,\dots,n$  dans la figure 5 on obtient une suite de tableaux  $\chi_j$   $j=1,2,\dots,n$  croisant individus et variables. La structure de ces  $n$  tableaux  $\chi_j$  est en fait exactement celle à laquelle nous nous sommes attardés lors de la présentation de l'analyse factorielle d'opérateurs à la section précédente. Nous supposons alors dans la suite de cette section que les tableaux  $X_{1j}, X_{2j}, \dots, X_{mj}$   $j=1,2,\dots,n$  présentent les mêmes groupes de variables mesurées sur des groupes d'individus différents.

Par ailleurs, mentionnons que dans la figure 5 nous avons décrit une structure où toutes les suites de tableaux  $X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in}$   $i=1,2,\dots,m$  ont la même "dimension temporelle". Cependant,

il est important de souligner que le cas plus général, où les "dimensions temporelles" diffèrent, peut être traité de façon tout à fait identique. En fait, nous avons choisi de présenter le cas de la dimension temporelle identique tout simplement afin d'alléger la notation nécessaire.

Le point de départ de cette extension est la partition des individus de chacun des tableaux  $\chi_j$   $j=1,2,\dots,n$  selon une variable qualitative à  $m$  modalités dont on aimerait analyser le comportement. De cette façon nous obtenons  $m$  séries de tableaux portant sur les individus caractérisés par la  $i^{\text{e}}$  modalité  $i=1,2,\dots,m$ . On applique alors la méthode STATIS duale à chacune de ces séries afin de calculer l'opérateur compromis associé aux tableaux  $X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in}$   $i=1,2,\dots,m$ . Finalement, on effectue une analyse transversale (interstructure) à l'aide de la méthode STATIS duale sur les  $m$  opérateurs compromis calculés afin d'analyser le comportement des variables selon les diverses modalités de la variable qualitative considérée.

Reprenons l'exemple introductif concernant le comportement de cinquante actions boursières d'entreprises canadiennes sur une période de quinze années pour mieux illustrer ce concept. L'utilisation de la méthode STATIS permet d'analyser l'interstructure, l'intrastructure et les trajectoires de ces cinquante actions d'une façon tout à fait individuelle l'une par rapport à l'autre. L'extension que nous proposons permet, entre autres, d'effectuer l'analyse de l'interstructure de ces mêmes actions, mais ces dernières pourraient être regroupées selon une variable qualitative représentant, par intervalle de cinq ans, le nombre d'années d'existence de l'action. Ainsi, cette méthode nous permettrait probablement de constater comment les variables à l'étude ont évolué selon le nombre d'années d'existence des diverses actions.

Nous venons de présenter le concept du prolongement de l'analyse factorielle d'opérateurs d'une façon informelle. Dans la sous-section qui suit, nous allons donner le formalisme nécessaire à sa mise en œuvre.



## 2.2.2 Formalisation théorique de la méthode

Afin de mieux visualiser les différents opérateurs que nous utiliserons avec cette nouvelle structure des données, la notation des indices sera identique à celle exposée dans la figure 5 présentée précédemment.

### 2.2.2.1 Description des objets

Comme nous l'avons exposé dans la figure 5, nous sommes en présence de  $m$  séries de tableaux  $X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in}$  (que nous avons supposé ayant tous la même "dimension temporelle") chacune étant caractérisée par une des modalités de la variable qualitative considérée. Ainsi, puisque ces  $m$  séries portent toutes sur les mêmes groupes de  $p$  variables mesurées sur des groupes d'individus différents, nous allons naturellement utiliser les opérateurs de covariance que nous noterons  $\{\Gamma_{ij}\}$   $i=1,2,\dots,m$   $j=1,2,\dots,n$ . D'autre part, nous définissons par  $X=(X_1, X_2, \dots, X_p)$  le vecteur aléatoire défini sur des populations différentes  $\{I_{ij}\}$   $i=1,2,\dots,m$   $j=1,2,\dots,n$  que nous supposerons finies. Ainsi, les opérateurs  $\{\Gamma_{ij}\}$   $i=1,2,\dots,m$   $j=1,2,\dots,n$  sont les opérateurs de covariance d'un même vecteur aléatoire  $X=(X_1, X_2, \dots, X_p)$  défini sur un même espace hilbertien  $E$ .

### 2.2.2.2 Première phase

La première étape à franchir dans l'application de cette méthode consiste à calculer les opérateurs compromis de chacune des  $m$  séries de tableaux  $(X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$ . Pour ce faire, nous allons interpréter le  $i^e$  compromis  $\Gamma_i^c$   $i=1,2,\dots,m$  comme l'opérateur de covariance du vecteur aléatoire  $X$  défini sur un espace probabilisé particulier. À cette fin considérons  $(I_{ij}, \wp(I_{ij}), P_{ij})$   $i=1,2,\dots,m$   $j=1,2,\dots,n$  et posons :

$$I_i = \bigcup_{j=1}^n I_{ij} \quad \text{avec } \forall j = 1, 2, \dots, n \text{ et } \forall \omega_{ij} \in I_{ij} \quad P_i(\omega_{ij}) = P_i(\omega_{ij} \in I_i) = u_{ij}^c P_{ij}(\omega_{ij})$$

où  $P_{ij}(\omega_{ij})$  est la probabilité pour que l'individu  $\omega_{ij}$  appartienne à la population  $I_{ij}$  supposée finie.

On obtient alors les m opérateurs compromis associés aux familles d'opérateurs  $\{\Gamma_{i1}, \Gamma_{i2}, \dots, \Gamma_{in}\}$   $i=1,2,\dots,m$  que l'on définit comme suit :

$$\Gamma_i^c = u_i^c \cdot \Gamma_i = \sum_{j=1}^n u_{ij}^c \Gamma_{ij}$$

où  $u_i^c = \frac{u_i^1}{\sum_{j=1}^n u_{ij}^1}$  est le vecteur propre associé à la plus grande valeur propre de l'opérateur caractéristique, dont les coordonnées sont positives ou nulles et de somme 1.

Le coefficient de normalisation  $\sum_{j=1}^n u_{ij}^c$  est choisi afin que le compromis soit un objet de même nature que les objets intervenant dans sa construction.

Ainsi, en s'appuyant sur la représentation matricielle des opérateurs considérés, on peut facilement vérifier que l'opérateur de covariance totale (noté  $\Gamma_i^T$ ) est égal à la somme de l'opérateur de covariance interclasse (noté  $\Gamma_i^G$ ) et de l'opérateur de covariance intraclasse (noté  $\Gamma_i^I$ ) pour tout  $i=1,2,\dots,m$  :

$$\Gamma_i^T = \Gamma_i^G + \Gamma_i^I \quad \text{où} \quad \Gamma_i^I = \sum_{j=1}^n u_{ij}^c \Gamma_{ij}$$

Bref, on interprète le  $i^{\text{e}}$  opérateur compromis  $\Gamma_i^c$   $i=1,2,\dots,m$  comme un opérateur de covariance intraclasse du vecteur aléatoire  $X$  défini sur l'espace probabilisé  $(I_i, \wp(I_i), P_i)$  où  $\wp(I_i)$  représente l'ensemble des parties de  $I_i$  et  $P_i$  la mesure de probabilité définie sur ce même ensemble.

### 2.2.2.3 Deuxième phase

Dans le cadre de cette deuxième et dernière phase nous allons considérer comme objet représentatif de chacune des études les opérateurs compromis  $\{\Gamma_1^c, \Gamma_2^c, \dots, \Gamma_m^c\}$  calculés précédemment. Ainsi, étant donné que les opérateurs  $\Gamma_i^c$   $i=1,2,\dots,m$  sont les opérateurs de covariance, nous allons utiliser à nouveau la méthode STATIS duale. Notons cependant que les opérateurs  $\Gamma_i^c$   $i=1,2,\dots,m$  ne doivent pas être considérés comme des tableaux de données initiales lors de l'utilisation du logiciel STATIS de LAVIT[11]. En effet, les opérateurs compromis sont déjà des matrices de variance-covariance résumant l'information de chacune des études associées aux  $m$  modalités de la variable qualitative de segmentation. Ainsi, nous pouvons utiliser le logiciel STATIS seulement après avoir effectué les modifications permettant de lui intégrer cette variante.

La démarche qui suit étant pratiquement la même que celle que nous avons décrite dans la première section de ce chapitre, nous allons, dans un souci de ne pas alourdir inutilement le texte, présenter brièvement les principaux résultats.

Considérons tout d'abord la famille  $\{\Gamma_1^c, \Gamma_2^c, \dots, \Gamma_m^c\}$  d'opérateurs compromis définis sur un même espace hilbertien  $E$  avec le produit scalaire canonique  $u \cdot v = \sum_i u_i v_i$ . Étant donné un vecteur  $u=(u_1, u_2, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m$ , nous définissons l'opérateur  $u \cdot \Gamma^c$  de la façon suivante :

$$\forall x \in E \quad (u \cdot \Gamma^c)(x) = \sum_{i=1}^m u_i \Gamma_i^c(x)$$

Puisque l'opérateur  $\Gamma_i^c$   $i=1,2,\dots,m$  est un opérateur de covariance, il est évident que ce dernier est symétrique. Il est alors facile de vérifier que l'opérateur  $u \cdot \Gamma^c$  l'est également. Par conséquent, l'application  $F : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\forall u \in \mathbb{R}^m, \forall v \in \mathbb{R}^m \quad F(u, v) = \langle u \cdot \Gamma^c, v \cdot \Gamma^c \rangle_{H.S.}$$

est une application bilinéaire symétrique. Ainsi, il est possible, comme c'est usuel en analyse des composantes principales, d'avoir un unique opérateur  $\sigma(u)$  de  $\mathbb{R}^m$  dans lui-même associé à  $F$  tel que :

$$\forall v \in \mathbb{R}^m \quad \sigma(u) \cdot v = F(u, v)$$

Par construction, l'opérateur  $\sigma$  est un opérateur symétrique semi-défini positif de  $\mathbb{R}^m$  appelé opérateur caractéristique de la famille  $\{\Gamma_i^c\}$   $i=1,2,\dots,m$ . Cet opérateur donne alors l'information au sujet de l'interstructure de la famille. En effet, la solution du problème d'optimisation suivant :

$$\max_{\|u\|^2=1} \|u \cdot \Gamma^c\|_{H.S.}^2$$

nous donne l'opérateur caractéristique. Notons cependant que cette procédure doit être itérée sous les contraintes d'orthonormalités. Comme nous pouvons le voir, cette procédure est tout à fait similaire à celle des composantes principales et conduit aux vecteurs propres et aux valeurs propres de  $\sigma$ . Nous arrivons naturellement à la définition suivante :

### Définition 2.6

On appelle opérateur principal l'opérateur  $O_\ell$   $\ell=1,2,\dots,q \leq m$  défini sur  $\mathbb{R}^m$  et ayant la forme suivante :

$$O_\ell = u_\ell \cdot \Gamma^c = \sum_{i=1}^m u_\ell^i \Gamma_i^c$$

où le vecteur  $u_\ell = (u_\ell^1, u_\ell^2, \dots, u_\ell^m) \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur propre unitaire ( $\|u_\ell\| = 1$ ) de l'opérateur  $\sigma$  associé à la valeur propre non nulle  $\lambda_\ell$ . Les vecteurs propres  $u_1, u_2, \dots, u_q$  sont associés aux valeurs propres  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_q \geq 0$  rangées par ordre décroissant.

Nous avons démontré au théorème 2.1 que les opérateurs  $O_\ell$   $\ell=1,2,\dots,q$  constituent une famille orthogonale ( $\langle O_\ell, O_{\ell'} \rangle = 0 \quad \forall \ell \neq \ell'$ ) dont la norme de chacun des éléments est  $\lambda_\ell^{1/2}$  ( $\|O_\ell\|^2 = \lambda_\ell$ ).

Par conséquent,

$$\Gamma_i^c = \sum_{\ell=1}^q u_\ell^i O_\ell \quad \forall i = 1, 2, \dots, m$$

Donc, l'interstructure de la famille  $\{\Gamma_1^c, \Gamma_2^c, \dots, \Gamma_m^c\}$  d'opérateurs de covariance n'est autre que le spectre de l'opérateur caractéristique  $\sigma$ . Cette analyse nous permettra alors de déceler les proximités et les différences entre les différents opérateurs résumant l'information de chaque modalité de la variable qualitative de segmentation.

En terminant, il est intéressant de remarquer que les opérateurs  $\{\Gamma_1^c, \Gamma_2^c, \dots, \Gamma_m^c\}$  ne sont rien d'autre que des opérateurs de covariance "moyens" d'un même vecteur aléatoire  $X=(X_1, X_2, \dots, X_p)$  défini sur des populations différentes  $\{I_i\}$   $i=1, 2, \dots, m$  que nous avons supposé finies. Nous pouvons alors interpréter l'opérateur compromis des opérateurs compromis  $(\Gamma^c)^c$  comme étant l'opérateur de covariance intraclasse du vecteur aléatoire  $X$  défini sur l'espace probabilisé  $(I, \wp(I), P)$  où  $I = \bigcup_{i=1}^m \bigcup_{j=1}^n I_{ij}$ . Cet opérateur compromis "généralisé" est donc défini sur un espace probabilisé identique à celui que nous avons décrit à la section 1.3.1.1 dans le cadre de la présentation de la méthode STATIS traditionnelle.

C'est ainsi que se termine cette dernière section de ce deuxième chapitre consacré au développement de la théorie permettant de formaliser l'extension de l'analyse factorielle d'opérateurs que nous avons proposée. Les deux premiers chapitres ayant été consacrés essentiellement à une présentation théorique, il nous a semblé intéressant de terminer ce

mémoire dans un contexte un peu plus concret. Nous nous proposons alors dans le prochain chapitre d'utiliser ces deux méthodes (STATIS et Extension de l'analyse factorielle d'opérateurs) afin d'analyser l'évolution économique de certains pays à travers le monde au cours des dernières années.

## **CHAPITRE 3**

### **ANALYSE COMPARATIVE DE L'ÉVOLUTION ÉCONOMIQUE DE CERTAINS PAYS À TRAVERS LE MONDE**

Nous avons développé dans les deux premiers chapitres l'essentiel de la théorie nécessaire à la compréhension de l'analyse factorielle de tableaux multiples nous permettant de justifier l'extension proposée. Cependant, puisque la théorie prend tout son sens dans la pratique, nous nous proposons d'effectuer, dans le cadre de ce dernier chapitre, certaines analyses nous permettant d'illustrer les principales méthodes statistiques étudiées dans ce mémoire.

Dans une première section nous nous proposons d'effectuer une analyse comparative de la structure de l'économie de divers pays à travers le monde. Naturellement, cette analyse, qui s'effectuera à l'aide de la méthode STATIS, a pour simple objectif de sensibiliser le lecteur aux diverses interprétations que l'on peut tirer de ce genre d'analyse de plus en plus utilisée. Par la suite, nous utiliserons la seconde section afin de présenter, à titre d'illustration, les résultats issus d'une analyse basée sur l'extension de l'analyse factorielle d'opérateurs proposée dans la seconde partie du deuxième chapitre.

#### **3.1 Analyse comparative de la structure de l'économie de divers pays**

Comme nous l'avons mentionné précédemment nous utiliserons la méthode d'analyse factorielle d'opérateurs STATIS pour effectuer cette analyse comparative. Ainsi, nous débuterons cette section par une présentation des données pour ensuite poursuivre avec l'interprétation des résultats des diverses analyses qui composent la méthode STATIS : interstructure, intrastructure et représentation des trajectoires.

### 3.1.1 Présentation des données

L'accumulation systématique de données normalisées a beaucoup progressé ces cinquante dernières années, mais il subsiste d'importantes lacunes et des écarts notables dans la qualité de l'information. Cela dit, sachant que la Banque mondiale possédait une excellente réputation concernant la fiabilité de ses données internationales de nature économique, nous avons décidé de puiser nos données dans la seconde édition annuelle de sa plus importante référence statistique intitulée : "World development indicators 1998".

L'étude que nous nous sommes proposés d'effectuer couvre la période, d'une durée de 26 ans, débutant en 1970 pour se terminer en 1995. Chaque année formera un tableau de données croisant les individus et les variables choisies. Le logiciel utilisé pour faire nos analyses juxtapose le premier caractère de chaque nom de tableau avec les 3 premiers caractères du nom de chaque variable pour construire le graphique des corrélations des variables avec les axes du compromis dans l'intrastructure. C'est pour cette raison que nous noterons A70 le tableau de données de l'année 1970, B71 le tableau de données de l'année 1971 et ainsi de suite jusqu'à Z95 pour le tableau de données de l'année 1995. Par ailleurs, nous avons sélectionné un échantillon de 40 pays représentant un peu plus des quatre cinquièmes de la production mondiale. Ainsi, ce dernier englobe probablement toute l'expérience de la période considérée en matière économique. De plus, mentionnons que tous les pays membres de l'Organisation de Coopération et de Développement Économiques (OCDE) en 1998, à l'exception de l'Allemagne dont les données n'étaient pas disponibles, ont été sélectionnés. Afin de prendre connaissance de cet échantillon, on trouvera ci-dessous la liste des quarante pays accompagnés de leur abréviation utilisée dans l'étude et nous ajouterons également, à titre informatif, leur continent d'appartenance ainsi qu'une mention disant si le pays est membre ou non de l'OCDE en 1998.



Tableau 1 : Liste des pays sélectionnés

Pays	Abréviation	Continent	OCDE	Pays	Abréviation	Continent	OCDE
<i>Afrique du Sud</i>	ZAF	Afrique	Non	<i>Irlande</i>	IRL	Europe	Oui
<i>Algérie</i>	DZA	Afrique	Non	<i>Islande</i>	ISL	Europe	Oui
<i>Australie</i>	AUS	Océanie	Oui	<i>Israël</i>	ISR	Asie	Non
<i>Autriche</i>	AUT	Europe	Oui	<i>Italie</i>	ITA	Europe	Oui
<i>Belgique</i>	BEL	Europe	Oui	<i>Japon</i>	JPN	Asie	Oui
<i>Brésil</i>	BRA	Amérique	Non	<i>Luxembourg</i>	LUX	Europe	Oui
<i>Cameroun</i>	CMR	Afrique	Non	<i>Maroc</i>	MAR	Afrique	Non
<i>Canada</i>	CAN	Amérique	Oui	<i>Mexique</i>	MEX	Amérique	Non
<i>Chili</i>	CHL	Amérique	Non	<i>Norvège</i>	NOR	Europe	Oui
<i>Chine</i>	CHN	Asie	Non	<i>Nouvelle-Zélande</i>	NZL	Océanie	Oui
<i>Colombie</i>	COL	Amérique	Non	<i>Pakistan</i>	PAK	Asie	Non
<i>Danemark</i>	DNK	Europe	Oui	<i>Pays-Bas</i>	NLD	Europe	Oui
<i>Espagne</i>	ESP	Europe	Oui	<i>Pérou</i>	PER	Amérique	Non
<i>États-Unis</i>	USA	Amérique	Oui	<i>Philippines</i>	PHL	Asie	Non
<i>Finlande</i>	FIN	Europe	Oui	<i>Portugal</i>	PRT	Europe	Oui
<i>France</i>	FRA	Europe	Oui	<i>République de Corée</i>	KOR	Asie	Oui
<i>Gabon</i>	GAB	Afrique	Non	<i>Royaume-Uni</i>	GBR	Europe	Oui
<i>Grèce</i>	GRC	Europe	Oui	<i>Suède</i>	SWE	Europe	Oui
<i>Inde</i>	IND	Asie	Non	<i>Suisse</i>	CHE	Europe	Oui
<i>Indonésie</i>	IDN	Asie	Non	<i>Thaïlande</i>	THA	Asie	Non

D'autre part, pour chacun des pays sélectionnés nous avons recueilli des données relativement à huit variables ayant un caractère économique. Nous avons utilisé comme unité monétaire comparable le dollar américain constant de 1987 puisque nous nous intéressons davantage aux variations des variables au fil des années plutôt qu'à leur valeur nominale. Enfin, certaines variables sont exprimées en dollars par habitant pour ainsi faciliter l'interprétation des résultats. Le tableau qui suit présente les définitions caractérisant chacune des variables sélectionnées, l'unité de mesure correspondante ainsi que l'abréviation utilisée dans l'étude.

Tableau 2 : Liste des variables sélectionnées

Variables	Unités	Abréviations	Définitions
<i>Produit intérieur brut au prix du marché (à prix constant de 1987)</i>	Milliards US \$	PIBM	Le produit intérieur brut au prix du marché est la somme des valeurs ajoutées de tous les producteurs résidents et non résidents plus toutes les taxes et moins toutes les subventions qui ne sont pas incluses dans la valeur de la production. Il est calculé sans tenir compte des déductions pour la dépréciation des actifs construits ou de la diminution et de la dégradation des ressources naturelles.

<b><i>Croissance annuelle du produit intérieur brut</i></b>	% annuel	CPIB	Le pourcentage annuel du taux de croissance du PIB au prix du marché est basé sur la valeur de la monnaie locale constante par rapport à 1987.
<b><i>Produit intérieur brut par habitant</i></b>	US\$ / habitant	HPIB	Le produit intérieur brut par habitant est tout simplement le PIB au prix du marché divisé par la population totale du pays considéré.
<b><i>Consommation générale du gouvernement</i></b>	US\$ / habitant	CGGV	La consommation générale du gouvernement inclut toutes les dépenses courantes pour l'achat de biens et services (incluant les salaires) par tous les niveaux de gouvernement excluant les entreprises gouvernementales. Elle inclut aussi les dépenses pour la sécurité et la défense nationale. On divise par la population totale pour avoir l'unité voulue.
<b><i>Exportations de biens et services</i></b>	US\$ / habitant	EXPT	Les exportations de biens et services représentent la valeur de tous les biens et services produits sur le territoire du pays et envoyés à l'extérieur de ce dernier. Elles incluent la valeur des marchandises, transports, assurances, voyages et les transactions n'impliquant pas le transfert de biens. Les transferts de biens et revenus de propriétés (formellement appelé revenus associés à bien) tels que les revenus d'investissements, d'intérêts et les revenus de professionnels sont exclus. On divise par la population totale pour avoir l'unité voulue.
<b><i>Importations de biens et services</i></b>	US\$ / habitant	IMPT	Les importations de biens et services représentent la valeur de tous les biens et services produits à l'extérieur du pays et amenés à l'intérieur de ce dernier. Elles incluent la valeur des marchandises, transports, assurances, voyages les transactions n'impliquant pas le transfert de biens. Les transferts de biens et revenus de propriétés (formellement appelé revenus associés à bien) tels que les revenus d'investissement, d'intérêts et les revenus de professionnels sont exclus. On divise par la population totale pour avoir l'unité voulue.
<b><i>Taux d'inflation annuel (déflateur)</i></b>	% annuel	INFL	L'inflation est mesurée par le taux de croissance annuel du déflateur implicite du PIB. Le déflateur implicite du PIB mesure le taux moyen annuel du changement des prix dans l'ensemble du pays pour la période concernée.
<b><i>Balance commerciale</i></b>	US\$ / habitant	BCOM	La balance commerciale est égale aux exportations de biens et services moins les importations de biens et services. On divise par la population totale pour avoir l'unité voulue.

Les variables concernant l'exportation et l'importation de biens et services par habitant sont évidemment interreliées à la variable concernant la balance commerciale par habitant. En effet, la balance commerciale n'est autre que la soustraction de l'exportation et de l'importation. Ainsi, afin de ne pas influencer les résultats de l'analyse nous avons décidé de présenter cette variable en supplémentaire. Étant donné que cette variable n'est pas incluse dans les variables actives, elle a un poids nul et n'intervient donc pas dans le calcul des axes. Nous pouvons tout de même situer cette variable par rapport aux autres.

Enfin, avant de présenter une série de tableaux sur les données à l'étude ainsi que certaines statistiques élémentaires les concernant, notons que cette étude présente un intérêt particulier puisqu'elle couvre la dernière période de récession en Amérique du nord, soit de 1989 à 1991. Ainsi, ceci nous permettra d'observer l'influence d'une telle situation sur le comportement des autres pays dans le monde.

Tableau 3 : Données initiales et statistiques élémentaires sur les variables à l'étude

TABLEAU DES DONNEES DE 1970 (A70)								
	CGGV	EXPT	IMPT	INFL	PIBM	HPIB	CPIB	BCOM
AUS	1467,13	1296,03	1490,59	5,32	121,53	9717,28	4,8	-194,57
AUT	2014,04	2235,91	2340,38	4,74	74,15	9985,67	7,12	-104,47
BEL	1521,45	4621,22	4636,31	4,62	95,25	9883,1	6,35	-15,08
BRA	132,96	64,27	100,43	17,18	109,72	1144,71	8,69	-36,16
CAN	2271,4	2074,55	1620,64	4,62	212,66	9972,99	2,59	453,92
CHE	2634,33	5315,59	4644,02	4,71	135,61	21638,29	6,38	671,56
CHL	189,53	193,16	442,72	40,72	13,26	1396,52	2,11	-249,56
CHN	12,71	6,01	5,1	-5,11	75,47	92,23	25,5	0,9
CMR	73,52	91,73	136,92	8,1	4,01	616,42	2,89	-45,18
COL	57,51	114,76	121,6	9,98	17	772,79	7,01	-6,83
DNK	3061,34	3221,83	4212	8,34	69,23	14046,08	2,03	-990,17
DZA	216,81	490,31	326,6	5,42	28,81	2095,8	8,86	163,71
ESP	545,89	546,98	617,37	5,94	175,88	5206,77	4,25	-70,39
FIN	1851,67	2438,72	2612,42	3,85	51,18	11111,52	7,47	-173,7
FRA	1999,34	1566,08	1711,27	5,63	566,94	11166,39	5,73	-145,19
GAB	349,34	1247,71	928,35	-0,06	2,08	4136,03	8,29	319,36
GBR	1882,39	1621,6	1661,73	7,28	470,84	8463,39	2,36	-40,13
GRC	404,03	278,73	602,57	3,91	32,75	3724,48	7,95	-323,84
IDN	13,24	67,32	21,39	14,63	24,85	211,43	7,2	45,92
IND	21,55	11,81	14,52	1,71	133,96	244,65	5,2	-2,71
IRL	957,83	1701,37	2185,57	9,74	16,68	5655,52	2,66	-484,19
ISL	1725,37	3966,68	3489,38	16,2	2,26	11095,31	7,46	477,3
ISR	2181,23	1273,99	2347,76	9,64	17,06	5736,58	7,31	-1073,77
ITA	1455,43	1200,97	1282,59	6,87	466,39	8665,44	5,31	-81,62
JPN	1098,87	722,45	850,59	6,58	1240,83	11891,65	10,59	-128,14
KOR	160,01	108,34	194,45	19,23	30,87	967	8,84	-86,11
LUX	1772,9	10401,39	10233,78	15,09	4,3	12668,59	1,7	167,62
MAR	44,74	142,04	157,57	3,29	8,81	575,48	4,9	-15,53
MEX	84,57	135,27	216,05	10,75	68,92	1369,43	7,46	-80,78
NLD	1712,65	4010,83	4465,91	6,17	147,06	11278,51	5,69	-455,07
NOR	2326,15	3378,71	4624,61	12,81	46,36	11957,81	2	-1245,89
NZL	1382,34	1757,17	1902,64	13,33	24,59	8719,2	-1,42	-145,47
PAK	23,9	32,73	102,31	4,36	13,53	223,2	11,3	-69,58
PER	99	167,98	179,51	9,75	4,25	322,17	5,47	-11,53
PHL	41,63	84,82	104,76	7,95	18,58	494,86	3,69	-19,94
PRT	216,19	611,34	788,08	1,97	22,87	2528,74	9,11	-176,73
SWE	3520,13	3244,76	3862,51	5,17	115,68	14382,58	6,47	-617,76
THA	48,63	78,93	152,25	-5	17,42	487,33	11,42	-73,32
USA	3024,54	823,95	1005	5,07	2922,09	14250,46	0,22	-181,05
ZAF	312,44	1028,3	859,02	3,73	53,71	2473,82	5,53	169,28
MOYENNES	1072,718	1559,409	1681,282	7,8558	191,436	6284,255	6,2123	-121,8722
ÉCARTS-TYPES	1033,647	2004,383	2028,035	7,3734	489,6776	5479,875	4,2542	367,3473
MATRICE DE CORRELATIONS								
	CGGV	EXPT	IMPT	INFL	PIBM	HPIB	CPIB	
CGGV	1							
EXPT	0,611	1						
IMPT	0,662	0,983	1					
INFL	-0,044	0,077	0,098	1				
PIBM	0,363	-0,068	-0,065	-0,102	1			
HPIB	0,917	0,715	0,725	-0,055	0,355	1		
CPIB	-0,379	-0,286	-0,312	-0,402	-0,174	-0,34	1	

TABLEAU DES DONNEES DE 1971 (B7I)

	CGGV	EXPT	IMPT	INFL	PIBM	HPIB	CPIB	BCOM
AUS	1474,67	1347,96	1395,01	6,73	127,41	9848,8	4,84	-47,04
AUT	2070,56	2368,35	2476,19	6,21	77,95	10448,4	5,11	-107,84
BEL	1599,81	4813,52	4787,09	5,68	98,8	10213,48	3,72	26,42
BRA	141,31	66,18	122,02	20,23	122,13	1243,53	11,32	-55,84
CAN	2335,15	2150,18	1710,88	3,2	224,91	10390,61	5,76	439,29
CHE	2763,09	5472,5	4888,64	9,15	141,13	22317,06	4,07	583,86
CHL	209,24	191,24	471,84	18,07	14,48	1497,48	9,2	-280,6
CHN	13,8	6,97	4,38	0,23	81,19	96,53	7,57	2,6
CMR	70,1	88,02	162,31	3,16	4,16	624,43	3,76	-74,29
COL	70,71	117,42	136,16	10,66	18,02	796,91	5,99	-18,74
DNK	3206,43	3377,67	4153,07	7,66	71,08	14321,67	2,67	-775,39
DZA	234,29	352,31	292,71	12,36	26,6	1877,15	-7,67	59,59
ESP	562,53	617,15	614,22	7,85	184,06	5383,36	4,65	2,93
FIN	1954,19	2402,91	2591,18	7,62	52,25	11319,03	2,09	-188,27
FRA	2058,66	1694,9	1802,54	6,34	594,06	11591,15	4,78	-107,64
GAB	372,85	1282,62	940,01	6,75	2,29	4418,73	10	342,61
GBR	1929,3	1722,45	1738,72	9,27	480,81	8596,93	2,12	-16,27
GRC	422,17	310,45	645,83	3,16	35,08	3972,47	7,12	-335,38
IDN	13,97	76,04	27,4	2,52	26,65	221,34	7,23	48,65
IND	23,24	11,59	17	5,45	136,15	243,01	1,63	-5,42
IRL	1030,39	1754,34	2265,47	10,59	17,26	5796,6	3,47	-511,13
ISL	1838,55	3604,83	4304,88	12,57	2,56	12422,67	13,06	-700,05
ISR	2141,18	1532,1	2532,81	12,39	18,98	6182,96	11,22	-1000,7
ITA	1519,77	1278,34	1311,25	6,72	475,23	8788,43	1,89	-32,91
JPN	1172,03	827,29	898,87	5,14	1298,48	12284,93	4,65	-71,58
KOR	171,03	128,49	228,32	9,71	34,47	1057,35	11,65	-99,83
LUX	1798,08	10641,17	10883,41	-0,81	4,42	12810,27	2,67	-242,24
MAR	46,19	137,93	149,48	4,03	9,31	592,56	5,64	-11,55
MEX	90,56	136,09	199,53	6,16	71,66	1378,15	3,97	-63,44
NLD	1766,45	4385,52	4683,02	8,1	153,27	11615,68	4,22	-297,5
NOR	2449,96	3394,48	4888,64	6,67	48,48	12422,04	4,58	-1494,16
NZL	1398,8	1862,86	1843,47	11,85	25,86	9061,83	5,18	19,39
PAK	23,75	31,98	89,17	5,22	13,59	217,25	0,49	-57,19
PER	102,91	158,55	182,43	7	4,43	326,55	4,24	-23,88
PHL	44,26	85,18	101,16	14,48	19,57	506,38	5,37	-15,98
PRT	240,71	702,87	944,23	5,02	24,39	2821,27	6,63	-241,35
SWE	3572,45	3376,4	3708,88	7,11	116,77	14419,84	0,94	-332,48
THA	49,38	90,59	128,19	-0,84	18,28	496,2	4,95	-37,61
USA	2911,55	824,34	1037,93	5,61	3006,13	14476,13	2,88	-213,59
ZAF	330,03	1037,22	925,34	4,67	56,63	2552,55	5,45	111,88
MOYENNES	1105,602	1611,525	1757,092	7,3422	198,4745	6491,293	4,9777	-145,5667
ÉCARTS-TYPES	1055,011	2052,85	2142,737	4,3949	504,89	5636,946	3,5747	355,6145

## MATRICE DE CORRELATIONS

	CGGV	EXPT	IMPT	INFL	PIBM	HPIB	CPIB
CGGV	1						
EXPT	0,628	1					
IMPT	0,656	0,987	1				
INFL	0,001	-0,165	-0,133	1			
PIBM	0,339	-0,065	-0,068	-0,091	1		
HPIB	0,922	0,719	0,716	-0,027	0,349	1	
CPIB	-0,158	-0,121	-0,092	0,231	-0,139	-0,147	1

TABLEAU DES DONNEES DE 1972 (C72)

	CGGV	EXPT	IMPT	INFL	PIBM	HPIB	CPIB	BCOM
AUS	1498,54	1350,72	1386,19	9,79	132,32	10041,36	3,85	-35,47
AUT	2141,42	2591,25	2758,47	7,6	82,78	11023,15	6,21	-167,22
BEL	1687,74	5325,97	5227,28	6,35	103,91	10702,23	5,18	98,69
BRA	149,71	80,21	142,97	18,89	137,14	1363,12	12,29	-62,75
CAN	2359,01	2281,84	1916,39	5,63	237,7	10807,52	5,69	365,45
CHE	2815,57	5765,24	5194,18	9,8	145,65	22811,24	3,2	571,06
CHL	217,29	159,53	478,28	85,23	14,38	1461,71	-0,67	-318,76
CHN	13,85	8,01	5,29	-0,7	84,07	97,52	3,55	2,72
CMR	78,38	90,06	156,85	8,33	4,26	623,02	2,34	-66,79
COL	65,47	129,18	126,28	13,14	19,4	835,45	7,65	2,9
DNK	3370,95	3545,54	4190,07	9,19	74,83	14989,71	5,28	-644,53
DZA	258,22	473,38	330,69	1,49	31,87	2181,43	19,82	142,69
ESP	587,36	694,6	757,76	8,52	199,06	5778,49	8,15	-63,16
FIN	2094,78	2736,27	2686,22	8,38	56,24	12119,81	7,63	50,05
FRA	2112,67	1882,24	2023,42	6,99	620,38	11999,38	4,43	-141,18
GAB	479,93	1321,18	1066,49	-6,6	2,53	4729,22	10,53	254,69
GBR	2008,48	1731,71	1896,29	8,15	497,82	8874,35	3,54	-164,58
GRC	443,17	379,01	740,52	5,03	38,2	4297	8,88	-361,51
IDN	14,74	89,95	30,48	17,21	28,26	229,06	6,04	59,47
IND	22,8	12,72	15,82	10,83	135,32	236,1	-0,61	-3,09
IRL	1091,19	1789,92	2344,39	13,36	18,38	6079,2	6,5	-554,47
ISL	2075,19	4068,48	4264,85	18,37	2,72	13000,72	6,18	-196,37
ISR	2047,72	1687,74	2471,25	12,62	21,57	6851,25	13,66	-783,51
ITA	1584,59	1369,52	1427,65	6,14	489,13	8994,52	2,93	-58,13
JPN	1213,12	849,4	979,45	5,55	1408,41	13139,63	8,47	-130,05
KOR	177,29	171,23	226,32	18,14	35,9	1079,08	4,15	-55,09
LUX	1855,61	11100,24	11069,87	5,79	4,71	13530,13	6,6	30,37
MAR	45,32	159,35	148,66	3,63	9,53	591,78	2,39	10,68
MEX	99,39	153,34	212,83	6,44	77,67	1445,74	8,4	-59,49
NLD	1762,47	4773,58	4857,9	9,37	158,34	11879,54	3,31	-84,32
NOR	2541,57	3843,1	4802,22	5,01	50,99	12964,21	5,17	-959,12
NZL	1459,25	1869,83	1982,33	9,68	26,97	9293,95	4,29	-112,5
PAK	27,02	25,65	58,88	6,25	13,7	212,03	0,77	-33,23
PER	106,67	168,52	176,94	8	4,55	325,93	2,64	-8,42
PHL	48,62	93,11	101,23	6,55	20,63	518,66	5,4	-8,11
PRT	261,84	834,51	1059,47	7,8	26,34	3052,01	8,02	-224,96
SWE	3649,06	3563,83	3844,86	6,97	119,44	14706,29	2,29	-281,03
THA	49,51	102,49	140,31	6,26	19,08	502,42	4,35	-37,82
USA	2889,68	884,8	1128,38	4,66	3159,73	15053,77	5,11	-243,59
ZAF	321,58	1045,73	792,05	11,5	57,32	2528,67	1,21	253,68
MOYENNES	1143,169	1730,075	1830,494	10,1335	209,2807	6773,759	5,6205	-100,42
ÉCARTS-TYPES	1081,393	2178,038	2193,814	12,9623	532,746	5841,995	3,8233	277,3574
MATRICE DE CORRELATIONS								
	CGGV	EXPT	IMPT	INFL	PIBM	HPIB	CPIB	
CGGV	1							
EXPT	0,641	1						
IMPT	0,671	0,992	1					
INFL	-0,132	-0,114	-0,092	1				
PIBM	0,322	-0,069	-0,061	-0,111	1			
HPIB	0,927	0,725	0,731	-0,15	0,351	1		
CPIB	-0,041	-0,022	-0,011	-0,274	-0,013	-0,019	1	

TABLEAU DES DONNEES DE 1973 (D73)

	CGGV	EXPT	IMPT	INFL	PIBM	HPIB	CPIB	BCOM
AUS	1581,63	1248,51	1791,87	14,37	138,46	10348,31	4,64	-543,36
AUT	2192,74	2716,69	3004,79	8,05	86,83	11496,07	4,89	-288,1
BEL	1772,55	6061,84	6176,45	7,1	110,2	11316,15	6,05	-114,61
BRA	164,13	89,49	168,07	22,24	156,85	1522,25	14,37	-78,59
CAN	2455,51	2480,33	2160,55	8,9	256,02	11445,03	7,71	319,78
CHE	2862,88	6173,78	5492,27	8,14	150,09	23338,76	3,05	681,51
CHL	217,38	161,23	444,81	413,32	13,69	1367,89	-4,82	-283,58
CHN	13,96	8,79	6,52	0,17	91,05	103,24	8,31	2,27
CMR	83,24	89,96	138,74	6,42	4,49	639,67	5,47	-48,77
COL	70,44	129,66	125,61	19,82	20,71	869,32	6,74	4,05
DNK	3484,52	3799,78	4696,92	10,66	77,55	15441,37	3,63	-897,14
DZA	257,93	484,11	402,38	10,37	32,86	2181,55	3,12	81,73
ESP	618,44	756,12	875,09	11,85	214,56	6163,77	7,79	-118,97
FIN	2199,59	2919,19	3018,91	14,08	60,01	12860,69	6,71	-99,71
FRA	2166,51	2068	2293,18	8,46	654,13	12550,91	5,44	-225,18
GAB	392,29	1285,91	1031,14	33,44	2,82	5087,94	11,27	254,77
GBR	2093,09	1934,31	2110,44	7,65	531,3	9449,87	6,72	-176,13
GRC	471,2	465,43	974,89	19,43	40,99	4590,99	7,32	-509,46
IDN	18,36	104,14	39,87	36,51	30,63	242,29	8,39	64,27
IND	22,07	13	17,59	17,6	139,89	238,62	3,38	-4,58
IRL	1146,53	1953,53	2745,74	15,28	19,25	6264,41	4,72	-792,21
ISL	2219,62	4358,39	5059,26	31,51	2,9	13689,05	6,81	-700,86
ISR	2857,56	1709,59	3271,11	27	22,29	6799,46	3,34	-1561,52
ITA	1618,19	1439,46	1537,84	13,69	521,13	9518,18	6,54	-98,38
JPN	1268,15	886,52	1207,74	12,53	1523,88	14099,67	8,2	-321,21
KOR	172,7	256,83	299,12	10,24	42,08	1240,17	17,24	-42,29
LUX	1894,96	12480,78	12158,8	12,2	5,1	14468,02	8,31	321,98
MAR	45,09	178,44	174,22	6,15	9,86	597,42	3,45	4,22
MEX	105,91	168,79	240,48	12,86	84,17	1517	8,36	-71,68
NLD	1762,07	5307,43	5348,23	9,01	165,77	12334,69	4,69	-40,8
NOR	2661,24	4132,14	5456,63	9,18	53,08	13401,67	4,11	-1324,49
NZL	1490,65	1799,97	2361,04	9,32	28,89	9772,25	7,1	-561,07
PAK	27,82	26,27	50,63	15,48	14,68	220	7,12	-24,36
PER	109,98	133,56	193,26	13,73	4,78	333,47	5,2	-59,7
PHL	52,85	105,09	103,77	17,02	22,44	548,76	8,79	1,33
PRT	282,19	869,17	1193,22	9,47	29,29	3393,07	11,2	-324,05
SWE	3735,75	4044,4	4103,57	7,03	124,18	15261,63	3,97	-59,17
THA	51,69	95	168,4	18,42	21,03	537,82	10,26	-73,4
USA	2833,93	1028,28	1166,89	6,31	3323,43	15683,29	5,18	-138,62
ZAF	328,74	970,86	862,67	17,96	60,11	2596,58	4,87	108,18

MOYENNES	1195,102	1873,369	2066,818	23,8242	222,2867	7088,283	6,491	-193,4475
----------	----------	----------	----------	---------	----------	----------	-------	-----------

ÉCARTS-TYPES	1133,392	2426,003	2441,912	62,8334	562,8971	6082,78	3,4806	412,2047
--------------	----------	----------	----------	---------	----------	---------	--------	----------

## MATRICE DE CORRELATIONS

	CGGV	EXPT	IMPT	INFL	PIBM	HPIB	CPIB
CGGV	1						
EXPT	0,619	1					
IMPT	0,671	0,986	1				
INFL	-0,165	-0,132	-0,122	1			
PIBM	0,292	-0,064	-0,068	-0,086	1		
HPIB	0,904	0,716	0,73	-0,181	0,355	1	
CPIB	-0,303	-0,125	-0,16	-0,493	-0,027	-0,227	1

TABLEAU DES DONNEES DE 1974 (E74)

	CGGV	EXPT	IMPT	INFL	PIBM	HPIB	CPIB	BCOM
AUS	1659,43	1334,53	1789,24	18,54	141,08	10280,34	1,89	-454,71
AUT	2314,41	3003,28	3207,6	9,5	90,25	11932,07	3,94	-204,31
BEL	1827,35	6270,19	6430,51	12,59	114,75	11747,44	4,13	-160,32
BRA	160,57	89,43	210,89	34,8	171,04	1621	9,04	-121,47
CAN	2544,87	2387,91	2357,34	14,41	267,21	11733,02	4,37	30,58
CHE	2906,07	6225,83	5428,6	6,93	152,28	23634,22	1,45	797,23
CHL	234,39	231,5	452,33	665,32	14,03	1379,43	2,51	-220,83
CHN	13,68	8,19	7,53	0,23	92,01	102,19	1,05	0,66
CMR	93,11	99,44	135,26	10,66	4,97	688,59	10,73	-35,82
COL	67,21	119,66	119,92	25,33	21,89	896,8	5,73	-0,25
DNK	3590,5	3914,88	4497,59	13,07	76,82	15227,65	-0,93	-582,7
DZA	327,84	441,15	526,65	49,61	35,3	2272,37	7,41	-85,5
ESP	669,48	741,38	936,04	15,95	226,62	6447,68	5,62	-194,65
FIN	2286,36	2885,25	3203,81	22,48	61,83	13179,56	3,03	-318,56
FRA	2178,64	2236,33	2322,02	11,85	674,47	12856,83	3,11	-85,69
GAB	455,18	1867,37	2172,4	75,45	3,71	6467,51	31,51	-305,04
GBR	2130,36	2067,73	2127,03	14,56	524,08	9319,29	-1,36	-59,3
GRC	526,16	464,27	813,05	20,93	39,5	4407,67	-3,64	-348,78
IDN	16,04	108,33	51,44	46,41	33,17	256,15	8,3	56,89
IND	20,57	13,47	15,21	16,7	141,62	236,17	1,24	-1,75
IRL	1213	1935,33	2639,26	6,08	20,07	6424,73	4,26	-703,93
ISL	2374,11	4183,18	5613,14	37,71	3,07	14268,32	5,71	-1429,96
ISR	2850,6	1755,25	3121,34	33,71	23,81	7051,6	6,84	-1366,09
ITA	1648,26	1548,98	1599,72	20,62	545,57	9899,44	4,69	-50,75
JPN	1238,93	1071,03	1234,44	20,92	1503,83	13651,07	-1,32	-163,41
KOR	196,56	249,9	344,19	27,48	46,23	1335,95	9,85	-94,29
LUX	1940,13	13640,27	12701,39	16,98	5,32	14879,04	4,21	938,88
MAR	49,49	168,46	178,2	24,37	10,39	614,71	5,39	-9,74
MEX	109,2	164,01	280,51	22,16	89,24	1559,81	6,03	-116,49
NLD	1786,86	5402,25	5261,47	9,16	172,34	12723,54	3,97	140,78
NOR	2751,57	4135,22	5679,51	10,25	55,84	14012,9	5,19	-1544,29
NZL	1577,37	1711,66	2614,44	2,98	30,61	10121,28	5,95	-902,78
PAK	22,9	21,06	56,72	25,59	15,18	220,44	3,42	-35,66
PER	113,41	136,66	239,02	15,35	5,23	354,44	9,28	-102,36
PHL	59,02	90,64	116,36	32,82	23,2	552,32	3,38	-25,73
PRT	326,48	722,51	1232,74	18,87	29,63	3384,41	1,14	-510,24
SWE	3839,36	4246,57	4498,41	9,46	128,16	15703,43	3,2	-251,84
THA	49,98	99,52	154,31	20,42	21,96	545,61	4,39	-54,79
USA	2877,08	1117,73	1119,9	8,54	3310,21	15478,83	-0,4	-2,17
ZAF	346,91	904,42	1005,6	14,61	64,65	2735,42	7,55	-101,18

MOYENNES	1234,836	1945,369	2162,379	36,585	224,7792	7255,081	4,7965	-217,009
----------	----------	----------	----------	--------	----------	----------	--------	----------

ÉCARTS-TYPES	1159,05	2571,932	2523,92	101,6286	560,1829	6164,477	5,3281	466,7906
--------------	---------	----------	---------	----------	----------	----------	--------	----------

## MATRICE DE CORRELATIONS

	CGGV	EXPT	IMPT	INFL	PIBM	HPIB	CPIB
CGGV	1						
EXPT	0,604	1					
IMPT	0,661	0,983	1				
INFL	-0,183	-0,134	-0,134	1			
PIBM	0,283	-0,056	-0,079	-0,085	1		
HPIB	0,905	0,712	0,734	-0,195	0,336	1	
CPIB	-0,285	-0,087	-0,077	0,023	-0,271	-0,251	1

TABLEAU DES DONNEES DE 1975 (F75)

	CGGV	EXPT	IMPT	INFL	PIBM	HPIB	CPIB	BCOM
AUS	1760,75	1373,33	1665,85	15,08	145,03	10439,36	2,8	-292,52
AUT	2409,04	2934,33	3061,73	6,46	89,93	11901,42	-0,36	-127,39
BEL	1904,39	5739,01	5834,15	12,16	113,11	11548,01	-1,43	-95,14
BRA	180,6	97,45	196,66	33,86	179,95	1665,67	5,21	-99,21
CAN	2661,74	2184,63	2237,36	9,83	274,15	11812,3	2,6	-52,73
CHE	2942,31	5851,32	4622,5	7,13	141,19	22043	-7,28	1228,82
CHL	206,96	233,21	273,05	336,05	12,4	1199,56	-11,65	-39,84
CHN	14,46	9,42	7,51	-1,57	99,63	108,72	8,29	1,9
CMR	85,99	86,62	138,39	5,99	5,53	743,79	11,25	-51,77
COL	67,1	133,74	104,24	23,24	22,35	893,71	2,06	29,5
DNK	3651,99	3833,77	4268,62	12,43	76,32	15082,21	-0,66	-434,85
DZA	374,47	430,19	594,69	5,45	37,09	2315,42	5,07	-164,51
ESP	696,99	730,76	918	16,78	227,85	6415,47	0,54	-187,24
FIN	2433,67	2471,7	3208,12	13,26	62,54	13274,94	1,15	-736,42
FRA	2263,8	2188,61	2087,55	12,97	672,59	12762,89	-0,28	101,06
GAB	677,7	2231,22	2693,53	5,83	4,36	7351,9	17,54	-462,31
GBR	2246,71	2001,28	1979,93	26,29	523,47	9310,17	-0,12	21,34
GRC	583,43	508,82	856,15	12,34	41,89	4630,44	6,05	-347,33
IDN	20,44	103,24	56,1	11,51	35,12	264,9	5,88	47,15
IND	22,2	14,6	14,64	-1,53	154,63	252,06	9,19	-0,04
IRL	1296,47	2046,7	2330,38	20,13	21,21	6675,22	5,66	-283,67
ISL	2560,02	4233,75	4829,81	41,84	3,09	14162,86	0,65	-596,06
ISR	3069,91	1746,07	3220,74	37,12	24,6	7121,11	3,32	-1474,68
ITA	1679,82	1557,69	1384,83	16,1	533,86	9629,3	-2,15	172,86
JPN	1372,77	1043,97	1089,82	7,37	1547,54	13824,7	2,91	-45,85
KOR	214,89	291,75	344,5	25,7	49,41	1400,35	6,87	-52,75
LUX	1987,07	11404,33	11457,37	-0,86	4,97	13781,72	-6,57	-53,04
MAR	67,1	135,98	227,11	1,51	11,09	640,63	6,7	-91,13
MEX	121,11	145,19	273,75	15,68	94,18	1599,57	5,53	-128,57
NLD	1843,56	5186,44	5003,03	10,2	172,18	12599,33	-0,09	183,41
NOR	2912,08	4239,56	6041,33	10,04	58,17	14516,82	4,17	-1801,77
NZL	1620,46	1890,68	2008,03	14,1	30,25	9800,69	-1,15	-117,35
PAK	24,71	22,77	51,48	24,13	15,8	222,49	4,13	-28,71
PER	122,54	136,01	225,88	23,09	5,41	357,02	3,54	-89,88
PHL	61,96	91,47	120,31	9,44	24,47	567,68	5,45	-28,84
PRT	335,12	587,14	887,48	16,23	28,34	3116,58	-4,35	-300,34
SWE	4003,2	3837,35	4325,38	14,51	131,43	16041,4	2,55	-488,04
THA	55,47	92,27	147,39	3,52	23,04	557,13	4,94	-55,12
USA	2907,84	1103,05	968,51	9,22	3296,57	15263,8	-0,41	134,54
ZAF	381,03	875,86	952,88	10,71	65,68	2722,87	1,59	-77,03
MOYENNES	1296,047	1845,632	2017,719	21,8335	226,5105	7215,43	2,4785	-172,0888
ÉCARTS-TYPES	1200,774	2270,721	2326,907	51,2406	560,3924	6033,748	5,0757	445,1586
MATRICE DE CORRELATIONS								
	CGGV	EXPT	IMPT	INFL	PIBM	HPIB	CPIB	
CGGV	1							
EXPT	0,638	1						
IMPT	0,672	0,982	1					
INFL	-0,118	-0,135	-0,131	1				
PIBM	0,272	-0,057	-0,091	-0,078	1			
HPIB	0,912	0,733	0,722	-0,161	0,338	1		
CPIB	-0,393	-0,451	-0,394	-0,457	-0,13	-0,449	1	



TABLEAU DES DONNEES DE 1976 (G76)

	CGGV	EXPT	IMPT	INFL	PIBM	HPIB	CPIB	BCOM
AUS	1797,75	1454,78	1822,7	11,06	149,33	10641,56	2,96	-367,93
AUT	2512,96	3260,58	3596,92	5,63	94,04	12452,73	4,58	-336,33
BEL	1971,32	6539,39	6609,98	7,57	119,44	12173,91	5,59	-70,59
BRA	190	94,89	189,71	47,63	197,56	1786,35	9,79	-94,82
CAN	2678,78	2384,34	2398,63	8,71	291	12373,4	6,14	-14,29
CHE	3051,81	6455,26	5274,53	2,73	139,2	21935,59	-1,4	1180,74
CHL	203,56	285,6	280,41	250,43	12,83	1222,02	3,46	5,19
CHN	13,94	7,73	6,2	2,51	94,23	101,25	-5,42	1,53
CMR	93,41	97,51	148,63	19,68	5,23	681,62	-5,5	-51,12
COL	67,89	126,34	114,35	25,28	23,43	915,14	4,85	11,98
DNK	3805,23	3980,19	4921,26	9,1	81,26	16017,42	6,47	-941,08
DZA	381,46	431,69	550,55	10,98	40,2	2434,17	8,4	-118,87
ESP	736,34	758,29	996,13	16,49	235,37	6549,59	3,3	-237,84
FIN	2564,72	2760,12	3145,89	13,54	62,27	13176,64	-0,42	-385,77
FRA	2348,54	2358,16	2441,72	11,13	701,13	13251,71	4,24	-83,57
GAB	736,35	2518,3	2935,02	15,44	5,87	9589,85	34,71	-416,72
GBR	2276,41	2176,92	2074,29	15,77	535,22	9520,84	2,24	102,63
GRC	605,34	584,42	896,89	15,39	44,56	4860,45	6,36	-312,47
IDN	21,39	117,87	63,89	14,82	37,42	275,35	6,54	53,97
IND	23,42	16,89	14,33	5,96	157,31	250,65	1,74	2,57
IRL	1309,21	2177,85	2629,98	21,02	21,5	6661,28	1,39	-452,13
ISL	2664,08	4743,47	4611,3	32,75	3,27	14870,44	5,96	132,17
ISR	2709,71	1972,63	3077,27	28,89	24,93	7055,53	1,32	-1104,64
ITA	1709,73	1744,82	1545,87	18,29	568,55	10204,05	6,5	198,96
JPN	1420,29	1208,31	1154	8,03	1608,67	14264,9	3,95	54,31
KOR	219,25	406,19	420,54	19,52	56,25	1569,1	13,85	-14,35
LUX	2040,43	11499,42	11576,56	12,22	5,09	14115,36	2,53	-77,14
MAR	94,84	142,15	269,96	1,52	12,31	694,82	11	-127,81
MEX	125,4	164,82	269,14	19,6	98,19	1623,57	4,26	-104,32
NLD	1904,24	5654,17	5466,14	8,96	181	13140,51	5,12	188,03
NOR	3112,12	4694,62	6753,26	7,48	62,13	15432,33	6,81	-2058,64
NZL	1595,64	2084,08	1962,48	18,77	30,99	9962,33	2,44	121,6
PAK	25,97	25,2	53,4	11,73	16,64	227,13	5,27	-28,19
PER	125	136,89	192,13	29,14	5,52	354	1,9	-55,24
PHL	61,72	100,68	119,28	8,32	26,62	602,49	8,79	-18,6
PRT	348,53	570,69	891,95	16,27	30,29	3238,32	6,9	-321,26
SWE	4129,84	3988,93	4698,38	11,92	132,82	16153,97	1,06	-709,45
THA	64,51	111,52	154,34	4,67	25,15	592,3	9,15	-42,81
USA	2894,85	1126,15	1141	6,53	3457,32	15856,74	4,88	-14,85
ZAF	393,43	894,09	839,35	10,93	66,71	2706,55	1,56	54,75
MOYENNES	1325,735	1996,399	2157,709	20,1602	236,5212	7488,399	5,0818	-161,31
ÉCARTS-TYPES	1224,615	2395,648	2462,457	37,9524	586,8256	6212,106	6,0755	459,2815

## MATRICE DE CORRELATIONS

	CGGV	EXPT	IMPT	INFL	PIBM	HPIB	CPIB
CGGV	1						
EXPT	0,663	1					
IMPT	0,701	0,982	1				
INFL	-0,18	-0,151	-0,155	1			
PIBM	0,264	-0,06	-0,081	-0,101	1		
HPIB	0,92	0,75	0,747	-0,211	0,338	1	
CPIB	-0,16	-0,059	-0,033	-0,025	-0,041	-0,055	1

TABLEAU DES DONNEES DE 1977 (H77)

	CGGV	EXPT	IMPT	INFL	PIBM	HPIB	CPIB	BCOM
AUS	1841,3	1472,06	1720,81	7,92	150,56	10608,58	0,82	-248,76
AUT	2581,86	3404,26	3815,82	5,75	98,38	13014,42	4,61	-411,56
BEL	2013,89	6745,01	6983,42	7,49	120,05	12222,91	0,52	-238,41
BRA	175,45	92,37	171,31	46,18	206,66	1825,63	4,61	-78,93
CAN	2767,58	2565,51	2412,02	6,29	301,4	12665,86	3,57	153,48
CHE	3073,33	7103,82	5779,76	0,26	142,59	22536,85	2,43	1324,06
CHL	208,23	314,74	374,34	105,93	13,93	1307,52	8,62	-59,6
CHN	14,55	7,48	6,55	0,96	101,66	107,75	7,89	0,93
CMR	78,61	83,17	159,07	5,89	5,95	750,83	13,74	-75,9
COL	69,56	117,94	122,67	29,32	24,38	931,17	4,07	-4,73
DNK	3885,11	4131,71	4907,97	9,41	82,57	16229,27	1,62	-776,26
DZA	378,83	416,47	646,39	11,76	42,33	2485,8	5,29	-229,92
ESP	756,01	839,99	930,22	23,38	242,05	6655,87	2,84	-90,23
FIN	2665,6	3181,34	3098,7	9,93	62,43	13172,69	0,25	82,63
FRA	2393,77	2520,62	2433,63	9,26	723,69	13617,34	3,22	86,99
GAB	800,14	2360,39	2814,29	8,33	5,2	8243,41	-11,4	-453,91
GBR	2238,85	2319,83	2105,02	14,06	546,83	9731,8	2,17	214,81
GRC	635,01	585,71	953,63	12,95	46,08	4950,41	3,43	-367,92
IDN	24,33	126,05	65,2	12,76	40,84	293,61	9,13	60,85
IND	23,59	15,91	18,4	5,55	168,65	262,64	7,21	-2,49
IRL	1318,45	2450,21	2938,61	13,26	23,27	7111,33	8,21	-488,4
ISL	2697,15	5119,76	5510,21	32,82	3,56	16020,84	8,72	-390,45
ISR	2294,64	2140,6	2938,34	42,35	24,93	6898,76	-0,01	-797,74
ITA	1752,89	1917,51	1565,11	18,41	584,98	10454,46	2,89	352,41
JPN	1465,38	1337,12	1189,68	6,9	1676,93	14727,58	4,24	147,44
KOR	231,68	492,91	498,66	15,87	62,3	1711,05	10,76	-5,76
LUX	2095,34	11959,92	11505,15	1,17	5,17	14305,24	1,57	454,77
MAR	95,4	151,79	296,68	15,66	12,91	712,45	4,9	-144,89
MEX	120,91	184,3	235,72	29,82	101,39	1634,96	3,26	-51,42
NLD	1957,19	5521,19	5590,78	6,66	185,19	13365,48	2,32	-69,59
NOR	3251,91	4844,68	6955,95	8,32	64,36	15917,73	3,58	-2111,27
NZL	1655,7	2077,08	1980,28	16,47	29,48	9449,56	-4,87	96,8
PAK	25,92	20,15	57,34	9,08	17,3	229,12	3,97	-37,18
PER	139,19	150,5	187,67	35,7	5,54	345,87	0,38	-37,17
PHL	60,83	114,45	124,05	8,33	28,1	620,99	5,55	-9,6
PRT	385,53	597,97	988,43	26,4	31,99	3383,58	5,6	-390,46
SWE	4237,38	4032,3	4505,56	10,53	130,7	15838,33	-1,6	-473,26
THA	69,37	120,84	180,06	6,38	27,53	631,92	9,46	-59,22
USA	2914,65	1130,26	1238,37	6,87	3604,61	16366,8	4,26	-108,1
ZAF	399,39	914,37	708,37	11,97	66,01	2618,68	-1,04	206
MOYENNES	1344,863	2092,057	2217,856	16,4088	245,312	7598,978	3,6697	-125,799
ÉCARTS-TYPES	1240,546	2498,731	2521,648	17,9776	611,5037	6339,499	4,3305	469,8127
MATRICE DE CORRELATIONS								
	CGGV	EXPT	IMPT	INFL	PIBM	HPIB	CPIB	
CGGV	1							
EXPT	0,677	1						
IMPT	0,707	0,983	1					
INFL	-0,25	-0,273	-0,255	1				
PIBM	0,261	-0,061	-0,081	-0,14	1			
HPIB	0,929	0,755	0,753	-0,311	0,344	1		
CPIB	-0,351	-0,3	-0,305	0,125	0,007	-0,363	1	

TABLEAU DES DONNEES DE 1978 (178)

	CGGV	EXPT	IMPT	INFL	PIBM	HPIB	CPIB	BCOM
AUS	1888,99	1557,31	1830,32	7,6	159,23	11089,77	5,76	-273,01
AUT	2604,5	3668,1	3822,58	5,91	98,08	12984,92	-0,31	-154,48
BEL	2133,8	6960,45	7228,39	4,44	123,38	12551,55	2,77	-267,94
BRA	180,81	102,22	175,06	41,06	213,34	1841,54	3,23	-72,84
CAN	2784,58	2886,4	2564,73	6,02	315,18	13113,01	4,57	321,67
CHE	3130,15	7356,19	6401,17	3,61	143,17	22593,44	0,41	955,02
CHL	219,03	344,78	433,55	57,61	14,98	1384,81	7,5	-88,77
CHN	16,23	7,32	9,44	1,11	115,77	121,08	13,88	-2,13
CMR	87,8	106,1	167,38	3,41	7,26	886,87	22,01	-61,28
COL	74,31	144,66	144,91	17,07	26,44	988,19	8,45	-0,25
DNK	4112,93	4167,58	4898,44	9,86	83,79	16417,32	1,48	-730,85
DZA	380,31	428,28	676,24	10,01	46,24	2633,94	9,25	-247,97
ESP	787,92	919,47	910,62	20,63	245,6	6677,78	1,46	8,86
FIN	2753,88	3478,13	2993,82	8,42	63,73	13408,83	2,09	484,31
FRA	2506,51	2657,87	2495,31	10,12	747,94	14012,64	3,35	162,56
GAB	559,67	2378,89	2219,15	-3,75	4,22	6497,41	-18,84	159,75
GBR	2288,44	2357,91	2184,89	11,46	566,32	10080,9	3,57	173,02
GRC	648,82	672,99	1008,71	12,95	49,17	5214,18	6,7	-335,72
IDN	27,99	124,52	71,85	9,8	44,45	312,59	8,84	52,68
IND	24,76	16,69	17,99	2,55	178,37	271,52	5,76	-1,3
IRL	1404,67	2716,98	3357,24	10,53	24,94	7525,8	7,19	-640,27
ISL	2863,15	5843,17	5659,84	46,26	3,77	16833,24	6,02	183,32
ISR	2434,82	2207,96	3148,69	56,38	26,13	7080,48	4,82	-940,73
ITA	1804,78	2101,88	1649,49	13,76	606,79	10805,59	3,73	452,38
JPN	1527,83	1321,72	1260,45	4,67	1764,22	15354,69	5,21	61,28
KOR	256,37	546,38	624,86	20,44	70,26	1900,44	12,77	-78,48
LUX	2129,44	12268,23	12288,55	5,13	5,39	14863,5	4,07	-20,32
MAR	99,8	157,29	252,54	7,7	13,28	716,83	2,91	-95,25
MEX	129,8	200,81	280,47	16,6	109,88	1730,11	8,37	-79,66
NLD	2019,45	5669,58	5906,29	5,31	189,54	13595,14	2,35	-236,71
NOR	3412,23	5230,33	5990,38	6,42	67,28	16574,79	4,54	-760,04
NZL	1732,4	2126,39	2012,17	13,28	29,48	9445,98	-0,01	114,23
PAK	27,06	22,06	59,45	9,01	18,69	240,34	8,07	-37,39
PER	118,37	165,51	138,2	59,13	5,55	337,4	0,18	27,31
PHL	61,24	118,64	136,69	9,36	29,54	638,17	5,14	-18,05
PRT	398,34	645,31	979,51	22,35	32,89	3441,37	2,82	-334,2
SWE	4364,45	4334,25	4246,53	9,55	132,99	16069,01	1,75	87,71
THA	76,5	132,56	187,38	9,6	30,39	680,6	10,4	-54,82
USA	2941,55	1225,3	1334,14	7,97	3770,19	16938,22	4,59	-108,85
ZAF	392,68	922,46	692,45	11,8	67,9	2630,43	2,85	230,01
MOYENNES	1385,159	2207,317	2261,497	14,6285	256,144	7762,111	4,7425	-54,18
ÉCARTS-TYPES	1288,443	2599,831	2597,43	15,2801	639,8406	6483,49	5,6643	335,7139
MATRICE DE CORRELATIONS								
	CGGV	EXPT	IMPT	INFL	PIBM	HPIB	CPIB	
CGGV	1							
EXPT	0,686	1						
IMPT	0,689	0,992	1					
INFL	-0,128	-0,182	-0,158	1				
PIBM	0,251	-0,065	-0,075	-0,14	1			
HPIB	0,927	0,763	0,746	-0,223	0,351	1		
CPIB	-0,303	-0,299	-0,278	0,047	-0,021	-0,356	1	

TABLEAU DES DONNEES DE 1979 (J79)

	CGGV	EXPT	IMPT	INFL	PIBM	HPIB	CPIB	BCOM
AUS	1904,39	1649,44	1811,34	11,63	162,13	11170,52	1,82	-161,9
AUT	2695,97	4105,13	4270,24	3,52	103,38	13692,93	5,41	-165,12
BEL	2185,18	7474,99	7896,66	4,52	126,07	12815,49	2,18	-421,67
BRA	191,12	109,19	185,12	56,48	227,78	1921,44	6,77	-75,93
CAN	2775,43	3001,44	2828,75	10,11	327,48	13489,29	3,9	172,69
CHE	3156,01	7520,92	6824,81	1,99	146,74	23105,28	2,49	696,11
CHL	235,54	387,73	523,95	45,72	16,28	1482,93	8,69	-136,22
CHN	19,45	10,4	13,4	3,46	124,67	128,66	7,69	-3
CMR	90,01	121,88	180,62	12,85	7,69	911,21	6,04	-58,74
COL	81,92	153,3	142,91	24,11	27,87	1019,86	5,4	10,4
DNK	4342,95	4504,4	5128,7	7,59	86,76	16956	3,54	-624,3
DZA	479,28	445,22	600,45	13,97	49,64	2741,79	7,33	-155,23
ESP	813,71	962,34	1005,42	16,93	245,7	6621,14	0,04	-43,09
FIN	2848,42	3754,09	3518,9	8,78	68,17	14305,68	6,96	235,19
FRA	2571,11	2843,9	2735,95	10,11	772,18	14404,79	3,24	107,95
GAB	533,61	1898,08	1838,87	20,5	4,19	6256,34	-0,79	59,21
GBR	2328,85	2444,64	2393,44	14,5	581,94	10347,12	2,76	51,2
GRC	678,26	708,88	1067,64	18,64	50,98	5339,78	3,69	-358,76
IDN	30,69	124,7	78,14	33,77	47,55	327,33	6,97	46,55
IND	25,69	17,32	20,48	15,86	168,97	251,43	-5,27	-3,16
IRL	1445,44	2846,62	3761,31	13,67	25,71	7632,79	3,07	-914,69
ISL	2993,31	6154,47	5748,09	40,89	3,95	17495,2	4,86	406,38
ISR	2167,55	2227,12	3053,82	76,19	27,77	7334,65	6,28	-826,7
ITA	1848,92	2256,46	1843,25	16,06	641,21	11385,52	5,67	413,21
JPN	1578,68	1367,05	1411,26	2,7	1861,87	16068,59	5,53	-44,21
KOR	253,49	532,05	686,6	17,92	76,51	2038,49	8,9	-154,56
LUX	2169,73	13409,4	13033	6,35	5,51	15161,92	2,35	376,4
MAR	105,57	154,56	255,15	7,57	13,89	733	4,58	-100,6
MEX	139,06	219,99	356,03	19,73	119,92	1844,58	9,14	-136,04
NLD	2075,68	6049,24	6210,43	4,13	193,74	13801,38	2,22	-161,2
NOR	3554,47	5335,94	6071,92	5,7	70,13	17219,16	4,25	-735,98
NZL	1716,09	2228,48	2273,03	13,83	30,23	9723,18	2,54	-44,54
PAK	26,19	24,26	75,16	6,67	19,38	241,85	3,67	-50,9
PER	104,41	195,27	160,65	73,64	5,86	347,58	5,71	34,62
PHL	62,13	121,06	155,26	14,91	31,19	659,13	5,57	-34,21
PRT	419,31	848,9	1090,97	19,44	34,75	3596,67	5,64	-242,07
SWE	4561,24	4590,23	4729,78	7,94	138,09	16649,83	3,84	-139,55
THA	86,45	143	221,31	8,99	31,92	698,35	5,03	-78,31
USA	2947,37	1319,21	1336,78	9,29	3850,64	17109,77	2,13	-17,58
ZAF	401,49	916,49	669,07	15,43	70,39	2660,67	3,68	247,42
MOYENNES	1416,104	2329,444	2405,217	17,9023	264,9707	7992,282	4,338	-75,7732
ÉCARTS-TYPES	1323,572	2785,707	2757,452	17,3893	657,3275	6684,847	2,7225	313,689

## MATRICE DE CORRELATIONS

	CGGV	EXPT	IMPT	INFL	PIBM	HPIB	CPIB
CGGV	1						
EXPT	0,681	1					
IMPT	0,694	0,994	1				
INFL	-0,268	-0,275	-0,263	1			
PIBM	0,243	-0,063	-0,075	-0,169	1		
HPIB	0,93	0,753	0,747	-0,351	0,347	1	
CPIB	-0,208	-0,258	-0,254	0,287	-0,126	-0,267	1

TABLEAU DES DONNEES DE 1980 (K80)

	CGGV	EXPT	IMPT	INFL	PIBM	HPIB	CPIB	BCOM
AUS	1968,88	1547,22	1954,21	10,52	167,31	11387,97	3,2	-406,99
AUT	2752,37	4318	4531,91	4,98	105,79	14006,25	2,33	-213,91
BEL	2216,03	7682,64	7890,39	3,85	131,55	13359,39	4,35	-207,75
BRA	187,15	130,86	182,16	87,31	248,53	2049,12	9,11	-51,31
CAN	2817,16	3043,61	2930,23	10,63	332,33	13513,28	1,48	113,39
CHE	3202,31	7942,32	7353,07	2,71	153,49	24291,02	4,6	589,25
CHL	213,24	436,16	637,3	28,75	17,61	1580	8,16	-201,14
CHN	20,16	16,09	20,36	2,99	135,44	138,03	8,64	-4,27
CMR	92,27	148,82	175,51	14,25	7,54	866,85	-1,97	-26,69
COL	90,39	158,03	166,32	27,52	29,02	1040,45	4,14	-8,28
DNK	4523,32	4731	4775,94	8,23	86,38	16861,3	-0,44	-44,94
DZA	452,64	375,83	601,79	25,59	50,1	2683,49	0,93	-225,96
ESP	841,57	977,15	1030,86	13,42	248,89	6657,39	1,3	-53,72
FIN	2958,15	4060,48	3801,07	9,75	71,8	15021,25	5,33	259,41
FRA	2622,8	2905,88	2789,74	11,38	784,73	14564,32	1,62	116,13
GAB	683,82	1971,38	2069,8	37,37	4,28	6191,9	2,11	-98,42
GBR	2365,64	2437,1	2306,67	18,84	572,4	10161,47	-1,64	130,44
GRC	672,95	750,61	972,83	17,69	51,88	5379,83	1,75	-222,22
IDN	35,98	128,89	83,99	30,82	51,76	349,04	8,86	44,9
IND	26,45	17,21	23,68	11,52	180,21	262,19	6,65	-6,47
IRL	1533,23	2998,07	3557,33	14,7	26,5	7791,44	3,08	-559,26
ISL	3029,66	6265,09	5868,08	52,48	4,18	18338,52	5,75	397
ISR	2781,46	2298,74	2794,15	123,22	29,68	7652,68	6,87	-495,42
ITA	1883,16	2065,34	1935,88	20,91	663,85	11763,3	3,53	129,46
JPN	1615,09	1586,73	1291,57	5,49	1913,35	16383,98	2,77	295,16
KOR	265,68	577,13	639,81	26,98	74,47	1953,41	-2,67	-62,68
LUX	2228,12	13164,61	13487,84	7,92	5,56	15230,73	0,84	-323,23
MAR	99,42	156,57	229,88	9,46	15,16	782	9,1	-73,32
MEX	148,67	228	458,37	26,57	130,09	1954,49	8,48	-230,37
NLD	2088,21	6131,58	6180,25	5,54	196,05	13855,4	1,19	-48,67
NOR	3734,15	5558,86	6207,63	13,13	73,6	17991,11	4,94	-648,77
NZL	1729,47	2296,23	2113,43	14,82	30,58	9823,64	1,16	182,8
PAK	26,89	28,13	75,85	8,87	21,4	259,12	10,41	-47,72
PER	106,34	166,48	179,46	65,93	6,04	349,37	3,06	-12,98
PHL	63,12	165,75	181,84	14,27	32,79	678,59	5,14	-16,09
PRT	447,96	858,38	1153,89	20,9	36,34	3721,29	4,59	-295,51
SWE	4653,5	4552,29	4741,16	11,72	140,4	16895,13	1,67	-188,86
THA	86,97	150,7	216,19	12,85	33,53	717,71	5,04	-65,49
USA	2966,5	1427,46	1265,27	10,12	3807,36	16755,92	-1,12	162,19
ZAF	426,92	893,14	776,41	24,62	75,68	2787,72	7,51	116,73
MOYENNES	1466,445	2383,714	2441,303	21,7155	268,6913	8151,253	3,7962	-57,5895
ÉCARTS-TYPES	1367,483	2812,299	2822,355	23,3494	654,5715	6848,155	3,332	242,5851
MATRICE DE CORRELATIONS								
	CGGV	EXPT	IMPT	INFL	PIBM	HPIB	CPIB	
CGGV	1							
EXPT	0,687	1						
IMPT	0,68	0,996	1					
INFL	-0,126	-0,209	-0,193	1				
PIBM	0,229	-0,059	-0,084	-0,15	1			
HPIB	0,917	0,77	0,748	-0,253	0,331	1		
CPIB	-0,379	-0,258	-0,252	0,26	-0,285	-0,384	1	

TABLEAU DES DONNEES DE 1981 (L81)

	CGGV	EXPT	IMPT	INFL	PIBM	HPIB	CPIB	BCOM
AUS	1954,2	1559,64	2140,21	10,08	171,56	11493,47	2,54	-580,57
AUT	2799,64	4529,41	4489,83	6,6	105,65	13965,09	-0,14	39,58
BEL	2229,34	7892,76	7685,18	5,53	129,42	13136,21	-1,62	207,58
BRA	177,26	155,19	156,07	107,21	237,61	1915,17	-4,39	-0,88
CAN	2852,42	3138,24	3140,99	10,77	344,6	13839,18	3,69	-2,76
CHE	3263,94	8278,53	7218,28	6,93	155,7	24504,45	1,44	1060,25
CHL	204,64	391,14	726,3	13,01	18,45	1630,44	4,77	-335,16
CHN	20,39	20,24	22,4	3,35	141,03	141,9	4,13	-2,16
CMR	95,67	191,33	253,34	8,8	8,83	986,06	17,08	-62,01
COL	91,87	136,6	171,12	22,99	29,64	1041,57	2,11	-34,52
DNK	4643,28	5119,98	4696,63	10,08	85,61	16714,53	-0,89	423,35
DZA	468,12	365,6	679,15	14,4	51,61	2679,52	3,02	-313,55
ESP	862,88	1047,58	978,42	12,57	248,45	6583,13	-0,18	69,16
FIN	3066,2	4255,44	3630,93	11,14	73,14	15237,37	1,86	624,51
FRA	2689,99	2995,92	2716,63	11,38	793,96	14653,5	1,18	279,29
GAB	786,39	1771,23	2880,48	8,56	4,57	6411,2	6,92	-1109,25
GBR	2370,71	2415,96	2240,19	11,42	564,94	10025,12	-1,3	175,77
GRC	712,47	699,86	999,39	19,75	51,91	5335,22	0,06	-299,53
IDN	38,73	103,53	110,15	10,63	55,89	369,36	7,96	-6,62
IND	27,02	17,1	24,64	10,26	191,99	273,16	6,53	-7,55
IRL	1519,4	3019,49	3573,84	17,44	27,38	7952,21	3,32	-554,35
ISL	3213,85	6379,82	6204,12	49,81	4,36	18872,23	4,26	175,69
ISR	2903,66	2363,5	2996,36	126,7	31,2	7887,97	5,15	-632,85
ITA	1921,57	2167,46	1897,84	19,09	667	11804,81	0,47	269,62
JPN	1675,3	1772,53	1287,33	4,12	1973,82	16777,31	3,16	485,2
KOR	276,48	654,09	666,8	17,15	79,28	2047,4	6,46	-12,71
LUX	2254,98	12505,71	13076,42	7,18	5,53	15117,83	-0,55	-570,71
MAR	102,05	153,45	229,14	9,7	14,74	743,63	-2,76	-75,69
MEX	160,14	248,04	527,08	26,19	141,53	2076,95	8,79	-279,05
NLD	2131,51	6203,54	5773,46	5,36	195,08	13692,65	-0,5	430,08
NOR	3912,91	5642,06	6285,89	13,05	74,19	18094,94	0,8	-643,83
NZL	1743,38	2325,24	2321,57	15,78	32,04	10187,99	4,77	3,67
PAK	27,67	32,12	59,99	9,89	23,1	271,39	7,95	-27,88
PER	122,98	163,89	207,99	64,57	6,49	366,12	7,35	-44,09
PHL	59,96	172,73	176,65	11,72	33,9	687,1	3,4	-3,92
PRT	468,52	813,16	1170,6	17,61	36,93	3748,88	1,62	-357,44
SWE	4753,59	4638,96	4459,73	9,55	140,38	16872,57	-0,01	179,23
THA	97,92	161,16	212,99	8,34	35,52	744,9	5,94	-51,82
USA	2974,54	1432,17	1316,1	10,16	3877,61	16898,4	1,84	116,08
ZAF	424,3	828,71	861,3	9,03	80,46	2890,53	6,31	-32,59
MOYENNES	1502,497	2419,078	2456,638	19,1975	273,6275	8216,787	3,0635	-37,5607
ÉCARTS-TYPES	1402,227	2804,743	2751,096	25,1318	667,6925	6890,543	3,8774	384,1836

## MATRICE DE CORRELATIONS

	CGGV	EXPT	IMPT	INFL	PIBM	HPIB	CPIB
CGGV	1						
EXPT	0,709	1					
IMPT	0,683	0,991	1				
INFL	-0,025	-0,133	-0,108	1			
PIBM	0,219	-0,055	-0,09	-0,11	1		
HPIB	0,915	0,786	0,746	-0,149	0,332	1	
CPIB	-0,433	-0,414	-0,391	-0,035	-0,125	-0,441	1

TABLEAU DES DONNEES DE 1982 (M82)

	CGGV	EXPT	IMPT	INFL	PIBM	HPIB	CPIB	BCOM
AUS	1972,5	1540,32	1929,93	11,4	167,35	11025,95	-2,45	-389,61
AUT	2881,63	4596	4275,19	5,26	107,73	14224,03	1,98	320,8
BEL	2198,86	8008,33	7680,3	6,91	131,56	13348,28	1,66	328,03
BRA	186,81	137,8	143,4	104,83	238,99	1883,46	0,58	-5,6
CAN	2884,87	3033,17	2632,75	8,69	333,51	13233,51	-3,22	400,42
CHE	3278,7	7995,23	6988,82	7,07	154,26	24137,12	-0,93	1006,42
CHL	197,81	403,34	438,19	8,64	16,52	1438,34	-10,42	-34,85
CHN	20,61	21,62	19,64	0,76	152,44	151,14	8,09	1,98
CMR	100,56	156,65	225,38	12,48	9,49	1030,97	7,52	-68,73
COL	94,26	131,82	181,12	24,68	29,93	1031,7	0,99	-49,3
DNK	4789,87	5252,2	4877,91	10,56	88,2	17232,68	3,02	374,28
DZA	482,01	390,27	646,55	1,84	54,94	2763,62	6,45	-256,28
ESP	903,62	1093,6	1019,6	13,93	252,34	6650,61	1,57	74
FIN	3150,35	4187,08	3690,37	8,89	75,51	15644,17	3,25	496,71
FRA	2776,11	2929,25	2771,57	11,73	814,17	14944,35	2,55	157,68
GAB	798,15	1683,55	2521,6	16,63	4,44	6026,88	-2,87	-838,05
GBR	2392,89	2440,13	2352,16	7,76	573,68	10186,48	1,55	87,97
GRC	724,28	645,49	1062,97	25,1	52,11	5322,9	0,39	-417,48
IDN	41,41	92,41	109,57	6,73	56,15	364,04	0,47	-17,16
IND	29,16	16,86	22,98	7,44	199,25	277,34	3,78	-6,11
IRL	1551,88	3152,56	3425,94	15,18	28	8047,31	2,28	-273,38
ISL	3361,19	5734,61	6089,13	53,29	4,45	19032,25	2,16	-354,52
ISR	2674,02	2249,76	3043,97	126,43	31,77	7881,24	1,81	-794,21
ITA	1967,23	2149,23	1899,88	17,05	670,05	11850,07	0,46	249,35
JPN	1712,42	1777,03	1247,13	1,82	2033,44	17167,19	3,02	529,89
KOR	274,94	672,88	676,3	8,51	83,75	2129,75	5,64	-3,42
LUX	2288,98	12469,93	13041,75	10,81	5,59	15293,13	1,13	-571,83
MAR	108,53	157,38	230,95	7,22	16,16	797,31	9,63	-73,58
MEX	159,61	296,96	320	60,49	140,39	2012,67	-0,8	-23,05
NLD	2170,18	6121,32	5721,38	5,38	192,8	13469,95	-1,17	399,94
NOR	3966,24	5628,19	6586,32	10,36	74,34	18065,18	0,2	-958,13
NZL	1733,39	2334,84	2328,86	10,38	32,69	10277,47	2,03	5,97
PAK	29,19	30,47	57,82	9,4	24,6	280,39	6,5	-27,35
PER	130,48	177,48	206,17	64,9	6,46	356,13	-0,43	-28,69
PHL	62,93	155,13	176,7	8,72	35,12	695,02	3,6	-21,57
PRT	483,01	845,93	1208,46	20,69	37,72	3805,56	2,14	-362,53
SWE	4799,35	4900,18	4609,41	8,25	141,79	17031,54	1	290,77
THA	97,21	176,49	178,31	5,18	37,38	768,7	5,23	-1,83
USA	3019,28	1288,89	1302,46	6,39	3788,1	16351,69	-2,31	-13,58
ZAF	439,88	802,09	693,97	14,95	79,3	2777,84	-1,44	108,12
MOYENNES	1523,36	2396,912	2415,873	19,1682	274,4117	8225,198	1,616	-18,9627
ÉCARTS-TYPES	1422,567	2778,828	2755,291	26,3218	659,8572	6907,657	3,5253	377,8905
MATRICE DE CORRELATIONS								
	CGGV	EXPT	IMPT	INFL	PIBM	HPIB	CPIB	
CGGV	1							
EXPT	0,711	1						
IMPT	0,691	0,991	1					
INFL	-0,064	-0,131	-0,087	1				
PIBM	0,221	-0,062	-0,089	-0,136	1			
HPIB	0,921	0,783	0,75	-0,155	0,326	1		
CPIB	-0,207	-0,162	-0,166	-0,123	-0,149	-0,246	1	

TABLEAU DES DONNEES DE 1983 (N83)

	CGGV	EXPT	IMPT	INFL	PIBM	HPIB	CPIB	BCOM
AUS	2031,44	1637,46	2008,42	6,73	178,03	11584,02	6,38	-370,96
AUT	2939,72	4777,06	4531,64	3,72	110,69	14656,93	2,74	245,41
BEL	2204,3	8228,55	7573,18	5,9	131,76	13368,16	0,15	655,36
BRA	167,73	154,11	115,82	140,2	230,84	1779,53	-3,41	38,29
CAN	2898,5	3195,19	2841,39	4,83	344,17	13520,38	3,2	353,8
CHE	3389,28	8045,4	7265,94	2,99	155,81	24273,27	1	779,46
CHL	190,16	399,96	373,89	30,55	15,91	1363,66	-3,7	26,07
CHN	22,22	21,86	21,94	1,67	168,05	164,23	10,24	-0,09
CMR	110,95	182,31	223,14	12,76	10,15	1072,26	6,87	-40,84
COL	92,01	128,09	161,56	20,37	30,41	1028,52	1,61	-33,47
DNK	4791,66	5511,54	4967,63	7,64	90,42	17680,47	2,52	543,9
DZA	494,38	401,24	665,02	6,86	57,9	2820,66	5,39	-263,77
ESP	934,28	1196,95	1011,8	11,76	257,95	6766,48	2,22	185,15
FIN	3248,09	4246,8	3780,91	8,57	77,56	15971,1	2,7	465,89
FRA	2821,41	3023,56	2685,29	9,73	819,82	14979,98	0,69	338,28
GAB	935,17	1697,9	2798,96	14,78	4,21	5521,6	-5,3	-1101,06
GBR	2440,66	2485,85	2497,81	5,34	594,05	10537,18	3,55	-11,97
GRC	739,88	692,94	1126,21	19,12	52,32	5313,34	0,4	-433,27
IDN	39,89	92,19	104,64	13,65	61,26	389,8	9,1	-12,44
IND	29,82	17,58	24,56	8,48	214,04	291,58	7,43	-6,98
IRL	1535,72	3458,22	3561,14	10,71	27,94	7972,59	-0,25	-102,91
ISL	3474,1	6284,49	5429,32	76,2	4,36	18386,83	-2,15	855,17
ISR	2520,27	2258,95	3164,67	149,42	32,88	8010,87	3,51	-905,71
ITA	2028,11	2217,51	1843,78	15,1	678,21	11990,2	1,22	373,73
JPN	1744,08	1848,87	1201,03	1,83	2079,27	17434,91	2,25	647,84
KOR	280,19	790,54	746,42	4,84	93,65	2346,52	11,81	44,12
LUX	2331,71	13125,92	13201,08	6,82	5,76	15745,82	2,99	-75,16
MAR	103,82	166,45	200,27	7,34	16,07	775,39	-0,57	-33,82
MEX	160,19	331,4	206,98	91,78	133,99	1876,81	-4,55	124,42
NLD	2211	6291,52	5924,75	2,09	196,09	13648,37	1,71	366,77
NOR	4058,25	5999,58	6357,58	6,96	76,99	18628,85	3,57	-357,99
NZL	1758,15	2445,65	2281,23	8,4	33,45	10382,13	2,32	164,42
PAK	33,42	36,89	62,04	5,3	26,26	290,34	6,75	-25,15
PER	118,15	153,41	149,87	105,67	5,65	304,64	-12,5	3,54
PHL	58,44	157,95	166,96	14,3	35,76	689,61	1,8	-9,01
PRT	499,15	956,87	1129,33	24,61	37,65	3782,56	-0,17	-172,46
SWE	4833,06	5381,21	4642,12	10,07	144,27	17317,5	1,75	739,09
THA	100,46	162,9	232,44	3,7	39,45	796,53	5,54	-69,54
USA	3053,42	1212,32	1454,72	4,97	3899	16677,2	2,93	-242,4
ZAF	436,75	761,85	567,87	16,98	76,98	2629,89	-2,92	193,98
MOYENNES	1546,5	2504,477	2432,583	22,5685	281,2257	8319,267	1,9705	71,8922
ÉCARTS-TYPES	1440,399	2905,551	2771,937	35,9817	677,7973	7012,706	4,419	400,1029
MATRICE DE CORRELATIONS								
	CGGV	EXPT	IMPT	INFL	PIBM	HPIB	CPIB	
CGGV	1							
EXPT	0,717	1						
IMPT	0,695	0,991	1					
INFL	-0,137	-0,172	-0,152	1				
PIBM	0,22	-0,071	-0,083	-0,141	1			
HPIB	0,93	0,78	0,75	-0,217	0,328	1		
CPIB	-0,005	-0,051	-0,047	-0,486	0,053	-0,027	1	



TABLEAU DES DONNEES DE 1984 (O84)

	CGGV	EXPT	IMPT	INFL	PIBM	HPIB	CPIB	BCOM
AUS	2121,91	1866,79	2296,16	5,51	187,09	12036,33	5,09	-429,37
AUT	2962,83	5079,62	4987,06	4,61	111,09	14709,42	0,36	92,56
BEL	2212,78	8660,06	7996,26	5,21	134,64	13665,04	2,19	663,8
BRA	146,53	183,97	110,04	212,49	243,24	1835,47	5,37	73,94
CAN	2907,35	3724,83	3295,67	3,14	366,11	14244,45	6,37	429,17
CHE	3419,24	8525,22	7756,32	2,77	158,57	24614,67	1,77	768,9
CHL	193,29	420,07	416,46	12,63	17,18	1449	7,95	3,62
CHN	26,79	25,18	28,66	4,89	193,58	186,71	15,19	-3,48
CMR	116,31	256,15	275,08	13,41	10,92	1123,6	7,61	-18,93
COL	93,99	138,69	152,3	21,95	31,49	1045,27	3,56	-13,61
DNK	4773,76	5704,96	5240,51	5,65	94,39	18463,81	4,39	464,45
DZA	508,83	410,37	659,89	6,65	61,28	2889,9	5,84	-249,53
ESP	953,24	1331,55	989,66	11,62	261,73	6838,5	1,47	341,89
FIN	3319,34	4436,02	3821,64	8,86	79,9	16365,23	3,02	614,37
FRA	2843,27	3222,15	2746,21	7,47	830,54	15115,38	1,31	475,95
GAB	987,91	2027,7	2752,88	3,48	4,9	6213,91	16,37	-725,18
GBR	2455,65	2643,72	2740,29	4,42	608,9	10775,83	2,5	-96,57
GRC	758,66	806,29	1122,97	20,28	53,76	5432,56	2,75	-316,69
IDN	40,5	96,44	95,01	7,81	65,66	410,16	7,18	1,43
IND	31,48	18,82	25,48	7,47	221,95	296,06	3,7	-6,66
IRL	1514,22	4003,59	3884,28	6,38	29,15	8260,69	4,35	119,31
ISL	3465,63	6382,3	5876,52	25,45	4,54	18985,43	4,13	505,78
ISR	2634,03	2535,01	3136,05	384,44	33,18	7978,32	0,9	-601,04
ITA	2070,89	2392,67	2067,95	11,57	695,64	12295,37	2,57	324,72
JPN	1773,77	2109,07	1318,31	2,63	2160,95	18005,25	3,93	790,76
KOR	280,83	862,44	800,04	3,03	101,88	2521,5	8,79	62,4
LUX	2378,55	15466,99	15012,54	4,41	6,11	16692,81	6,19	454,45
MAR	106,77	168,19	204,73	8,76	16,74	790,26	4,19	-36,54
MEX	166,83	342,44	238,27	58,58	138,92	1901,33	3,68	104,16
NLD	2202,27	6739,57	6194,11	1,39	202,55	14042,68	3,3	545,46
NOR	4082,87	6461,24	6714,01	6,31	81,54	19695,48	5,9	-252,77
NZL	1772,89	2649,36	2519,88	7,62	35,1	10790,5	4,94	129,48
PAK	36,35	33,24	63,03	9,59	27,61	296,02	5,13	-29,78
PER	107,16	158,95	126,93	112,13	5,88	310,22	4,11	32,02
PHL	50,19	159,72	134,18	53,35	33,13	622,32	-7,33	25,55
PRT	498,52	1064,52	1075,43	24,68	36,95	3698,63	-1,88	-10,91
SWE	4940,32	5746,41	4887,1	7,58	150,11	18005,42	4,05	859,32
THA	106,8	187,83	246,02	1,45	41,72	828,28	5,75	-58,19
USA	3104,42	1278,62	1794,95	4,39	4143,8	17571,5	6,28	-516,33
ZAF	455,27	774,1	663,98	10,73	81,5	2717,44	5,87	110,12
MOYENNES	1565,556	2727,371	2611,672	27,8697	294,0979	8593,021	4,471	115,7008
ÉCARTS-TYPES	1454,725	3217,311	3041,881	67,9161	716,0182	7248,471	3,8117	370,8088
MATRICE DE CORRELATIONS								
	CGGV	EXPT	IMPT	INFL	PIBM	HPIB	CPIB	
CGGV	1							
EXPT	0,69	1						
IMPT	0,68	0,995	1					
INFL	-0,062	-0,144	-0,116	1				
PIBM	0,22	-0,072	-0,07	-0,099	1			
HPIB	0,931	0,762	0,745	-0,18	0,329	1		
CPIB	-0,157	-0,098	-0,07	-0,192	0,017	-0,157	1	

TABLEAU DES DONNEES DE 1985 (P85)

	CGGV	EXPT	IMPT	INFL	PIBM	HPIB	CPIB	BCOM
AUS	2193,11	1911,75	2269,48	6,79	194,27	12328,31	3,84	-357,73
AUT	3001,01	5438,09	5291,95	3,12	113,53	15027,71	2,2	146,15
BEL	2266,91	8757,09	8057,98	6,15	135,64	13759,42	0,74	699,12
BRA	182,57	192,91	107,81	231,74	262,55	1941,06	7,94	85,1
CAN	2970,1	3910,2	3547,93	2,63	383,44	14780,73	4,73	362,27
CHE	3514,08	9193,56	8114,36	3,08	164,45	25417,01	3,71	1079,2
CHL	189,7	442,17	367,51	30,84	18,38	1525,89	7,01	74,66
CHN	29,4	26,73	43,46	9,81	220,37	209,67	13,84	-16,73
CMR	121,59	271,71	286,87	11,22	11,8	1182,26	8,03	-15,16
COL	96,32	155,65	139,61	24,68	32,52	1059,38	3,27	16,05
DNK	4892,39	5985,64	5662,62	4,33	98,44	19248,21	4,29	323,02
DZA	520,72	408,05	675,99	4,34	64,89	2965,88	5,9	-267,94
ESP	1002,09	1362,04	1063,93	7,69	268,57	6992,48	2,61	298,12
FIN	3455,39	4465,75	4049,91	5,33	82,59	16847,22	3,37	415,84
FRA	2896,39	3270,31	2859,51	5,73	846,42	15342,09	1,91	410,8
GAB	854,41	1898,47	2844,23	19,9	4,79	5877,71	-2,17	-945,76
GBR	2446,05	2789,46	2799,55	5,91	630,38	11120,83	3,53	-10,09
GRC	779,83	813,52	1261,92	17,67	55,44	5580,69	3,12	-448,4
IDN	42,73	87,3	98,21	4,29	67,93	416,67	3,47	-10,91
IND	34,37	17,84	28,26	7,55	233,94	305,75	5,4	-10,42
IRL	1536,89	4253,44	3998	5,18	30,05	8489,26	3,09	255,44
ISL	3659,81	7028,6	6376,2	31,29	4,69	19448,7	3,3	652,4
ISR	2691,88	2702,84	3058,27	266,71	34,33	8109,11	3,45	-355,43
ITA	2134,86	2475,58	2170,26	9,01	715,18	12637,28	2,81	305,31
JPN	1768,04	2210,23	1291,99	2,08	2256,99	18690,78	4,44	918,24
KOR	293,75	871,83	778,8	5,36	109,23	2676,85	7,21	93,03
LUX	2418,75	16895,2	16012,74	2,98	6,29	17133,02	2,92	882,46
MAR	120,45	176,17	204,2	8,49	17,79	821,58	6,26	-28,04
MEX	164,51	321,06	264,13	55,83	143,01	1912,83	2,94	56,93
NLD	2244,15	7049,85	6555,68	1,77	208,77	14405,75	3,07	494,17
NOR	4166,56	6907,75	7289,24	5,34	85,69	20633,97	5,09	-381,48
NZL	1793,36	2677,96	2543,68	14,11	35,4	10820,25	0,85	134,28
PAK	37,68	32,08	66,51	4,58	29,69	308,74	7,56	-34,43
PER	109,09	162,38	113,45	167,74	6,02	310,42	2,26	48,92
PHL	48,38	129,72	112,12	17,61	30,72	561,94	-7,29	17,6
PRT	529,38	1132,94	1088,15	21,73	37,98	3793,96	2,81	44,79
SWE	5052	5806,63	5258,65	6,63	153,01	18324,22	1,93	547,97
THA	112,4	203,15	211,65	2,14	43,67	854,16	4,68	-8,51
USA	3218,78	1283,45	1902,48	3,45	4282,7	18000,27	3,35	-619,02
ZAF	460,15	823,87	557,71	17,54	79,62	2594	-2,31	266,16
MOYENNES	1601,251	2863,574	2735,624	26,5592	305,0292	8811,403	3,629	127,9495
ÉCARTS-TYPES	1493,346	3452,36	3233,052	57,7381	741,2573	7473,891	3,2456	403,3708
MATRICE DE CORRELATIONS								
	CGGV	EXPT	IMPT	INFL	PIBM	HPIB	CPIB	
CGGV	1							
EXPT	0,677	1						
IMPT	0,682	0,995	1					
INFL	-0,134	-0,181	-0,17	1				
PIBM	0,219	-0,076	-0,072	-0,111	1			
HPIB	0,93	0,753	0,745	-0,235	0,328	1		
CPIB	-0,15	-0,159	-0,167	0,063	0,015	-0,157	1	

TABLEAU DES DONNEES DE 1986 (Q86)

	CGGV	EXPT	IMPT	INFL	PIBM	HPIB	CPIB	BCOM
AUS	2231,31	2068,46	2083,71	7,23	199,16	12433,5	2,52	-15,25
AUT	3051,9	5303,37	5131,11	2,72	116,18	15357,11	2,33	172,26
BEL	2307,42	9235,11	8651,92	3,56	137,86	13978,73	1,64	583,19
BRA	214,68	169,15	136,03	144,32	284,62	2063,39	8,41	33,12
CAN	2986,76	4043,87	3779,83	2,37	395,96	15110,69	3,26	264,04
CHE	3625,56	9179,48	8641,15	3,78	169,16	26008,86	2,87	538,34
CHL	188,66	478,94	390,15	22,09	19,41	1585,39	5,61	88,79
CHN	29,89	30,76	37,11	4,5	240,01	224,99	8,91	-6,35
CMR	151,17	227,85	232,21	0,14	12,6	1229,3	6,82	-4,35
COL	95,88	184,49	142,62	28,8	34,52	1103,65	6,13	41,87
DNK	4909,43	5979,28	6036,64	4,55	102,02	19922,09	3,64	-57,36
DZA	528,01	395,57	512,36	2,23	64,56	2868,77	-0,5	-116,8
ESP	1053	1383,3	1213,96	11,07	277,16	7195,42	3,2	169,34
FIN	3551,37	4505,45	4140,5	4,57	84,54	17190,72	2,37	364,95
FRA	2934,73	3209,87	3051,42	5,17	868,05	15670,48	2,56	158,45
GAB	808,79	1764,75	2497,75	-22,07	4,59	5443,55	-4,23	-733
GBR	2479	2905,49	2982,73	3,17	658,12	11575,94	4,4	-77,24
GRC	771,11	924,95	1305,94	17,52	56,34	5654,08	1,62	-380,99
IDN	43,2	98,78	100,47	-0,11	71,96	433,43	5,92	-1,69
IND	37,06	18,58	29,72	6,55	245,27	313,68	4,84	-11,14
IRL	1576,96	4375,09	4221,77	6,55	29,92	8450,39	-0,43	153,32
ISL	3893,45	7385,23	6384,15	25,48	4,98	20497,7	6,27	1001,07
ISR	2396,15	2830,31	3284,82	49,55	35,97	8367,2	4,79	-454,51
ITA	2187,1	2494,15	2263,89	7,83	735,49	12995,43	2,84	230,27
JPN	1847,68	2071,78	1309,18	1,81	2320,81	19102,62	2,83	762,6
KOR	315,54	1093,09	910,02	4,47	121,98	2961,81	11,67	183,07
LUX	2468,63	17348,39	16516,47	2,75	6,78	18346	7,75	831,92
MAR	133,54	180,75	216,69	10,8	19,18	867,01	7,83	-35,95
MEX	163,19	321,92	220,9	73,9	137,37	1795,97	-3,95	101,02
NLD	2311,88	7139,22	6750,6	0,11	214,58	14725,33	2,78	388,62
NOR	4229,75	7035,39	8115,43	-0,87	88,69	21274,85	3,5	-1080,05
NZL	1809,98	2796,31	2591,09	18,4	36,13	11025,74	2,07	205,22
PAK	40,14	41,34	62,95	3,28	31,33	315,87	5,52	-21,62
PER	115,06	142,79	133,67	74,71	6,57	331,94	9,24	9,12
PHL	47,26	147,86	120,32	2,95	31,77	565,75	3,42	27,55
PRT	567,34	1209,56	1271,95	20,45	39,56	3951,34	4,14	-62,4
SWE	5102,97	6008,64	5481,51	6,86	156,52	18699,82	2,29	527,13
THA	109,9	230,84	206,45	1,61	46,11	887,9	5,58	24,39
USA	3312,62	1356,67	2010,15	2,64	4399,08	18319,35	2,72	-653,48
ZAF	460,41	775,3	532,13	15,93	79,91	2546,35	0,36	243,17
MOYENNES	1627,212	2927,304	2842,537	14,5343	314,6204	9034,805	3,8385	84,766
ÉCARTS-TYPES	1515,815	3534,22	3380,65	27,5398	761,567	7702,844	3,1955	389,8318

## MATRICE DE CORRELATIONS

	CGGV	EXPT	IMPT	INFL	PIBM	HPIB	CPIB
CGGV	1						
EXPT	0,679	1					
IMPT	0,69	0,995	1				
INFL	-0,247	-0,228	-0,24	1			
PIBM	0,225	-0,08	-0,07	-0,099	1		
HPIB	0,938	0,755	0,757	-0,279	0,322	1	
CPIB	-0,218	-0,051	-0,071	0,221	-0,086	-0,225	1

TABLEAU DES DONNEES DE 1987 (R87)

	CGGV	EXPT	IMPT	INFL	PIBM	HPIB	CPIB	BCOM
AUS	2261,04	2211,92	2261,52	7,47	209,6	12887,16	5,24	-49,6
AUT	3054,89	5462,07	5404,87	2,07	118,18	15605,8	1,73	57,21
BEL	2311,57	9793,55	9377,8	2,21	140,79	14264,03	2,12	415,75
BRA	254,49	197,93	129,57	204,92	294,08	2092,26	3,32	68,36
CAN	2998,71	4130,54	3990,96	4,71	412,35	15531,22	4,14	139,58
CHE	3666,96	9275,14	9059,56	2,58	172,59	26370,48	2,03	215,58
CHL	180,79	502,85	455,17	24,65	20,68	1661,38	6,54	47,68
CHN	30,82	33,63	33,39	4,92	268,22	247,43	11,75	0,24
CMR	141,99	195,01	240,95	-2,22	12,31	1168,21	-2,32	-45,93
COL	99,38	193,59	147,52	23,36	36,37	1141,86	5,37	46,07
DNK	5024,59	6275,51	5908,87	4,71	102,32	19957,28	0,29	366,63
DZA	516,58	407,92	355,37	5,58	64,47	2785,06	-0,14	52,55
ESP	1143,56	1467,43	1454,7	5,88	292,72	7581,53	5,61	12,73
FIN	3691,59	4614,05	4509,23	4,68	88,01	17841,13	4,1	104,83
FRA	3004,58	3293,85	3272,81	2,93	887,86	15960,05	2,28	21,04
GAB	724,78	1608,03	1703,12	1,21	3,85	4414,36	-16,16	-95,08
GBR	2496,1	3065,7	3215,28	4,98	689,45	12093,66	4,76	-149,58
GRC	775,05	1068,81	1516,71	14,26	56,08	5607,13	-0,46	-447,89
IDN	42,37	111,22	100,65	15,43	75,74	448,21	5,26	10,57
IND	39,43	20,3	28,6	8,59	256,9	321,66	4,74	-8,29
IRL	1497,8	4966,83	4474,96	2,2	31,32	8829,68	4,67	491,86
ISL	4096,97	7533,8	7773,85	19,5	5,41	21977,73	8,54	-240,05
ISR	2778,53	3095,46	3847,58	20,24	38,56	8824,91	7,19	-752,12
ITA	2256,88	2603,81	2536,16	6,12	758,26	13396,41	3,1	67,65
JPN	1867,35	2050,5	1426,75	0,07	2418,18	19806,38	4,2	623,75
KOR	331,69	1317,35	1077,72	4,8	136,32	3278,83	11,75	239,63
LUX	2569,27	18006,17	17642,62	0,93	6,94	18662,57	2,33	363,55
MAR	130,4	195,6	230,95	3,61	18,75	829,64	-2,25	-35,34
MEX	157,63	349,6	240,01	140,3	140,16	1791,59	2,03	109,59
NLD	2357,7	7380,78	6986,93	-0,73	217,62	14839,65	1,42	393,85
NOR	4403,34	7082,21	7557,15	6,87	90,55	21625,43	2,09	-474,94
NZL	1809,5	2977,06	2793,39	11,88	36,38	11012,96	0,68	183,67
PAK	44,12	43,16	68,44	4,52	33,35	325,95	6,44	-25,28
PER	117,88	129,66	150,33	83,9	7,13	352,53	8,46	-20,68
PHL	48,2	153,17	150,52	7,49	33,14	574,03	4,32	2,65
PRT	590,02	1347,43	1567,89	10,1	42,08	4210,51	6,38	-220,45
SWE	5134,1	6242,78	5883,33	4,76	161,44	19221,36	3,15	359,45
THA	108,45	276,68	271,31	4,65	50,53	957,55	9,6	5,36
USA	3383,15	1476,34	2096,26	3,07	4528,1	18688,84	2,93	-619,92
ZAF	467,64	745,18	539,22	13,57	82,07	2560,67	2,71	205,96
MOYENNES	1665,247	3047,565	3012,051	17,2693	325,9715	9243,678	3,4985	35,516
ÉCARTS-TYPES	1557,047	3656,577	3582,273	38,7933	785,7764	7910,449	4,4835	276,9478

## MATRICE DE CORRELATIONS

	CGGV	EXPT	IMPT	INFL	PIBM	HPIB	CPIB
CGGV	1						
EXPT	0,674	1					
IMPT	0,687	0,997	1				
INFL	-0,276	-0,245	-0,247	1			
PIBM	0,22	-0,082	-0,071	-0,082	1		
HPIB	0,935	0,747	0,752	-0,295	0,322	1	
CPIB	-0,087	-0,103	-0,104	0,072	0,013	-0,1	1

TABLEAU DES DONNEES DE 1988 (\$88)

	CGGV	EXPT	IMPT	INFL	PIBM	HPIB	CPIB	BCOM
AUS	2270,93	2205,77	2758,3	8,81	218,33	13206,42	4,17	-552,53
AUT	3080,65	6002,67	5948,43	1,57	121,93	16053,98	3,17	54,23
BEL	2284,23	10594,68	10103,1	1,77	147,72	14918,09	4,92	491,58
BRA	246,76	219,82	125,82	652,29	293,32	2049,66	-0,26	94
CAN	3081,57	4465,11	4483,93	4,69	432,82	16093,09	4,96	-18,82
CHE	3809,86	9777,75	9502,37	2,42	177,6	27036,22	2,9	275,37
CHL	184,17	551,64	504,88	21,42	22,2	1753,82	7,35	46,76
CHN	31,28	37,26	39,23	11,9	299,11	271,53	11,52	-1,97
CMR	112,76	198,32	214,57	0,77	11,35	1047,43	-7,78	-16,25
COL	107,31	192,19	154,34	27,73	37,86	1167,11	4,09	37,85
DNK	5069,08	6759,81	5993,89	3,39	103,51	20177,97	1,16	765,92
DZA	531,14	398,62	357,71	13,05	63,42	2667,33	-1,64	40,92
ESP	1187,19	1538,6	1661,05	5,65	307,84	7956,45	5,17	-122,45
FIN	3761,18	4767,32	4993,61	7,03	92,33	18648,11	4,9	-226,29
FRA	3092,64	3543,92	3537,25	2,8	928,12	16607,93	4,53	6,67
GAB	618,36	1608,79	1727,35	-5,8	4,01	4451,78	4,22	-118,56
GBR	2507,01	3073,76	3613,23	6,06	723,8	12663,06	4,98	-539,47
GRC	816,63	1160,47	1632,39	15,59	58,57	5835,71	4,45	-471,92
IDN	44,78	110,43	80,4	13,04	80,54	468,3	6,34	30,03
IND	40,67	20,84	32,45	8,03	282,47	346,34	9,95	-11,61
IRL	1430,06	5440,17	4715,76	3,25	33,01	9350,29	5,41	724,42
ISL	4220,99	7148,86	7300,84	22,83	5,4	21617,21	-0,08	-151,98
ISR	2664,28	2989,27	3714,96	20,17	39,34	8855,57	2,02	-725,69
ITA	2316,48	2732,67	2688,43	6,78	787,6	13908,03	3,87	44,24
JPN	1902,76	2162,9	1718,05	0,64	2569,21	20953,83	6,25	444,84
KOR	354,84	1468,48	1205,67	6,67	151,73	3614,67	11,3	262,81
LUX	2684,36	20032,87	19009,12	0,71	7,66	20513,4	10,39	1023,75
MAR	134,34	230,85	245,94	5,49	20,66	895,56	10,24	-15,09
MEX	153,4	361,64	320,93	112,82	141,94	1774,6	1,27	40,71
NLD	2375,84	7991,5	7469,69	1,17	223,31	15129,62	2,61	521,82
NOR	4375,59	7493,67	7340,46	4,95	90,45	21490,11	-0,1	153,21
NZL	1812,64	2985,91	2765,98	8,43	36,15	10898,52	-0,62	219,93
PAK	44,59	40,81	64,98	9,46	35,95	340,56	7,78	-24,17
PER	106,37	117,81	134,04	555,04	6,53	316,47	-8,35	-16,23
PHL	51,13	170,85	175,1	9,63	35,39	596,03	6,76	-4,25
PRT	639,26	1438,87	1844,2	11,82	44,15	4429,27	4,92	-405,34
SWE	5141,94	6370,62	6170,58	6,48	165,07	19567,86	2,25	200,04
THA	110,95	346,03	372,39	5,92	57,25	1066,83	13,29	-26,36
USA	3411,49	1693,45	2149,63	3,8	4700,38	19224,54	3,8	-456,17
ZAF	465,91	801,96	644,24	15,63	85,14	2603,43	3,74	157,73
MOYENNES	1681,886	3231,174	3187,882	40,3475	341,0792	9514,17	4,1463	43,292
ÉCARTS-TYPES	1576,473	3965,807	3777,55	130,889	819,8038	8128,565	4,4299	350,8401

MATRICE DE CORRELATIONS

	CGGV	EXPT	IMPT	INFL	PIBM	HPIB	CPIB
CGGV	1						
EXPT	0,657	1					
IMPT	0,676	0,997	1				
INFL	-0,248	-0,207	-0,216	1			
PIBM	0,219	-0,077	-0,068	-0,066	1		
HPIB	0,933	0,741	0,755	-0,268	0,329	1	
CPIB	-0,199	0,031	0,025	-0,431	0,05	-0,12	1

TABLEAU DES DONNEES DE 1989 (T89)

	CGGV	EXPT	IMPT	INFL	PIBM	HPIB	CPIB	BCOM
AUS	2312,03	2286,62	2851,54	5,92	224,91	13376,04	3,01	-564,92
AUT	3109,39	6651,14	6415,92	2,73	127,09	16653,99	4,23	235,22
BEL	2252,06	11351,7	10980,34	4,57	152,81	15376,44	3,45	371,36
BRA	287,45	227,07	134,74	1322,76	302,89	2080,44	3,26	92,33
CAN	3149,19	4421,79	4681,31	4,89	443,07	16182,89	2,37	-259,52
CHE	3922,36	10145,69	9893,78	4,16	184,46	27750,62	3,86	251,91
CHL	187,63	629,74	618,15	15,79	24,39	1894,56	9,87	11,59
CHN	33,89	39,29	41,53	8,82	311,35	278,34	4,09	-2,24
CMR	106,36	237,35	256,47	-1,7	11,13	998,07	-1,93	-19,12
COL	111,28	204,7	147,27	24,64	39,16	1185,7	3,45	57,43
DNK	5035,06	7036,68	6259	4,22	104,1	20279,81	0,56	777,68
DZA	530,83	419,69	407,3	14,49	66,59	2730,46	5,01	12,38
ESP	1283,13	1581,55	1944,17	7,03	322,6	8321,33	4,79	-362,62
FIN	3840,81	4817,57	5426,37	6,11	97,56	19661,44	5,67	-608,81
FRA	3075,45	3867,45	3785,86	3,02	967,62	17145,42	4,26	81,58
GAB	603,86	1873,41	1590,98	9,58	4,31	4628,67	7,39	282,42
GBR	2533,42	3206,6	3866,59	7,13	739,57	12893,9	2,18	-659,99
GRC	857,05	1207,14	1795,76	14,43	60,83	6028,3	3,85	-588,62
IDN	48,53	119,79	88,13	10,04	87,82	501,67	9,04	31,66
IND	42,09	23,24	31,6	8,29	301,08	361,64	6,59	-8,36
IRL	1420,29	6037,53	5382,96	5,49	34,96	9960,39	5,89	654,57
ISL	4299,5	7277,95	6479,39	19,78	5,42	21431,84	0,25	798,56
ISR	2394,73	3049,51	3404,11	18,05	39,68	8782,28	0,87	-354,6
ITA	2335,99	2940,51	2928,46	6,29	810,3	14298,02	2,88	12,05
JPN	1932,39	2350,84	2028,83	1,99	2694,3	21884,27	4,87	322,01
KOR	381,5	1395,43	1388,32	5,26	161,5	3810,76	6,44	7,11
LUX	2757,82	21400,86	20039,27	3,47	8,41	22276,77	9,85	1361,59
MAR	130,85	205,38	260,27	4,04	21,14	897,27	2,29	-54,9
MEX	151,02	373,91	370,46	26,3	148,17	1812,69	4,39	3,44
NLD	2397,96	8471,88	7925,59	1,21	233,79	15744,27	4,69	546,29
NOR	4440,48	8281,37	7467,15	5,57	91,41	21624,19	1,05	814,22
NZL	1827,49	2901,44	3137,14	5,75	36,41	10933,29	0,71	-235,7
PAK	52,09	45,28	65,4	8,77	37,67	345,92	4,79	-20,12
PER	78,36	137,01	98,12	2926,6	5,77	273,86	-11,66	38,89
PHL	53,24	184,07	196,28	9,02	37,59	616,14	6,22	-12,21
PRT	675,78	1630,3	1956,9	12,15	46,32	4661,7	4,92	-326,59
SWE	5215,63	6524,5	6582,05	8,03	169	19898,43	2,38	-57,54
THA	111,9	412,02	445	6,14	64,21	1176,13	12,17	-32,99
USA	3439,81	1867,9	2196,4	4,59	4846,19	19634,6	3,1	-328,5
ZAF	475,39	829	633,98	17,08	87,3	2618,71	2,54	195,02
MOYENNES	1697,352	3416,622	3355,073	114,3125	353,822	9775,281	3,841	61,549
ÉCARTS-TYPES	1589,587	4217,438	3960,731	494,8786	848,2388	8346,662	3,7195	415,6128

## MATRICE DE CORRELATIONS

	CGGV	EXPT	IMPT	INFL	PIBM	HPIB	CPIB
CGGV	1						
EXPT	0,651	1					
IMPT	0,667	0,997	1				
INFL	-0,213	-0,169	-0,179	1			
PIBM	0,218	-0,074	-0,064	-0,067	1		
HPIB	0,93	0,746	0,76	-0,234	0,33	1	
CPIB	-0,18	0,094	0,091	-0,624	-0,01	-0,072	1

**TABLEAU DES DONNEES DE 1990 (U90)**

	<b>CGGV</b>	<b>EXPT</b>	<b>IMPT</b>	<b>INFL</b>	<b>PIBM</b>	<b>HPIB</b>	<b>CPIB</b>	<b>BCOM</b>
<i>AUS</i>	2341,53	2507,64	2658,97	3,16	223,04	13069,68	-0,83	-151,33
<i>AUT</i>	3110,21	7086,8	6802,86	3,44	132,89	17201,19	4,56	283,94
<i>BEL</i>	2235,64	11752,23	11360,91	2,85	158,44	15895,53	3,68	391,32
<i>BRA</i>	255,16	212,37	145,88	2598,96	288,83	1951,52	-4,64	66,49
<i>CAN</i>	3201,98	4536,04	4702,13	3,04	441,78	15896,43	-0,29	-166,09
<i>CHE</i>	4066,5	10350,91	10083,08	5,71	188,7	28113,61	2,3	267,82
<i>CHL</i>	186,39	678,95	629,57	19,25	25,19	1922,71	3,25	49,38
<i>CHN</i>	33,73	43,47	35,66	5,73	323,02	284,56	3,75	7,81
<i>CMR</i>	117,03	207,82	232,77	1,69	10,45	909,61	-6,15	-24,95
<i>COL</i>	112,58	236,38	155,94	28,79	40,67	1209,09	3,84	80,44
<i>DNK</i>	5006,41	7514,61	6324,06	2,69	105,58	20541,38	1,43	1190,55
<i>DZA</i>	535,24	423,18	358,26	34,61	65,62	2623,9	-1,46	64,92
<i>ESP</i>	1365,56	1629,56	2092,03	7,31	334,68	8617,75	3,74	-462,46
<i>FIN</i>	3968,92	4859,28	5370,1	5,82	97,57	19569,31	0,01	-510,82
<i>FRA</i>	3122,59	4053,11	3996,58	3,08	991,99	17484,58	2,52	56,53
<i>GAB</i>	568,09	2027,37	1468,74	16,43	4,49	4674,14	4,23	558,64
<i>GBR</i>	2588,46	3353,94	3869,93	6,42	742,48	12898,98	0,39	-515,99
<i>GRC</i>	855,83	1150,19	1938,87	20,6	60,84	5987,73	0,03	-788,68
<i>IDN</i>	49,97	118,14	105,12	7,78	95,68	536,84	8,95	13,01
<i>IND</i>	42,63	24,79	31,97	10,98	318,04	374,38	5,63	-7,18
<i>IRL</i>	1498,82	6571,57	5662,94	-0,71	37,88	10804,16	8,36	908,62
<i>ISL</i>	4450,44	7215,99	6490,13	16,71	5,48	21504,69	1,17	725,86
<i>ISR</i>	2425,09	3008,31	3574,46	15,73	42,39	9096,69	6,84	-566,15
<i>ITA</i>	2362,45	3147,23	3202,45	7,63	827,83	14595,23	2,16	-55,22
<i>JPN</i>	1954,51	2504,36	2181,55	2,27	2832,5	22928,32	5,13	322,81
<i>KOR</i>	404,2	1436,78	1568,6	9,75	177,12	4131,56	9,67	-131,81
<i>LUX</i>	2812,23	21875,16	20707,18	3,42	8,59	22501,07	2,16	1167,98
<i>MAR</i>	127,19	242,34	290,22	5,38	22,01	915,63	4,15	-47,88
<i>MEX</i>	152,49	385,5	434,32	27,77	156,12	1869,99	5,37	-48,82
<i>NLD</i>	2420,44	8862,44	8201,52	2,29	243,46	16282,55	4,14	660,92
<i>NOR</i>	4640,86	8964,01	7629,23	3,87	93,21	21975,11	1,97	1334,78
<i>NZL</i>	1867,09	3051,91	3102,05	2,4	36,26	10782,37	-0,42	-50,15
<i>PAK</i>	48,86	44,99	57,22	6,44	39,35	350,28	4,47	-12,23
<i>PER</i>	77,79	114,19	107,54	6134,45	5,46	253,86	-5,39	6,65
<i>PHL</i>	55,38	181,63	210,48	13,37	38,59	616,52	2,68	-28,85
<i>PRT</i>	718,53	1802,83	2241,4	12,37	48,46	4896,7	4,61	-438,57
<i>SWE</i>	5310,65	6579,49	6575,03	8,84	171,3	20014,08	1,36	4,46
<i>THA</i>	118,47	452,04	540,67	5,59	71,76	1291,09	11,75	-88,63
<i>USA</i>	3486,37	1992,65	2241,04	4,37	4901,9	19654,94	1,15	-248,39
<i>ZAF</i>	477,28	827,9	586,09	15,29	86,87	2558,21	-0,5	241,81

<b>MOYENNES</b>	1729,34	3550,702	3449,189	227,1392	362,4129	9919,648	2,6443	101,5135
-----------------	---------	----------	----------	----------	----------	----------	--------	----------

<b>ÉCARTS-TYPES</b>	1623,115	4346,34	4073,085	1028,69	865,438	8463,006	3,6987	468,1565
---------------------	----------	---------	----------	---------	---------	----------	--------	----------

**MATRICE DE CORRELATIONS**

	<i>CGGV</i>	<i>EXPT</i>	<i>IMPT</i>	<i>INFL</i>	<i>PIBM</i>	<i>HPIB</i>	<i>CPIB</i>
<i>CGGV</i>	1						
<i>EXPT</i>	0,654	1					
<i>IMPT</i>	0,658	0,996	1				
<i>INFL</i>	-0,212	-0,169	-0,176	1			
<i>PIBM</i>	0,213	-0,072	-0,063	-0,068	1		
<i>HPIB</i>	0,927	0,752	0,757	-0,233	0,333	1	
<i>CPIB</i>	-0,152	0,007	0,001	-0,447	-0,018	-0,086	1

TABLEAU DES DONNEES DE 1991 (V91)

	CGGV	EXPT	IMPT	INFL	PIBM	HPIB	CPIB	BCOM
AUS	2379,91	2696,58	2721,68	1,88	223,74	12945,15	0,32	-25,1
AUT	3139,14	7410,72	7149,01	3,74	137,45	17562,96	3,43	261,71
BEL	2276,19	12074,76	11633,87	3,09	160,93	16085,56	1,57	440,9
BRA	246,38	222,79	158,05	377,34	290,31	1930,72	0,51	64,74
CAN	3250,54	4547,76	4802,17	2,82	433,74	15424,63	-1,82	-254,4
CHE	4155,45	10007,28	9789,55	6	187,19	27527,74	-0,8	217,73
CHL	191,2	739,12	672	20,88	27,01	2027,73	7,24	67,12
CHN	40,15	49,48	40,77	6,46	353,62	307,3	9,47	8,71
CMR	124,47	195,14	215,16	3,42	10,06	851,12	-3,65	-20,02
COL	114,22	259,86	158,37	26,16	41,6	1214,69	2,3	101,49
DNK	4985,42	8069,59	6567,37	2,23	107	20760,89	1,34	1502,23
DZA	571,95	409,26	287,04	56,46	64,7	2524,44	-1,41	122,22
ESP	1438,81	1754,15	2275,84	7,09	342,33	8796,57	2,29	-521,69
FIN	4045,7	4512,39	4713,93	2,48	90,68	18085,03	-7,07	-201,54
FRA	3191,81	4195,37	4095,29	3,24	1000,27	17531,74	0,84	100,07
GAB	568,11	2023,23	1396,69	-12,51	4,82	4872,26	7,5	626,54
GBR	2643,77	3318,25	3655,86	6,57	727,8	12589,92	-1,98	-337,61
GRC	835,64	1182,53	2037,91	19,89	62,67	6116	3,01	-855,39
IDN	51,69	139,16	120,58	8,87	104,18	574,33	8,88	18,58
IND	41,58	26,77	27,61	14,62	319,58	368,8	0,48	-0,84
IRL	1534,33	6879,95	5706,92	1,78	38,86	11022,62	2,6	1173,03
ISL	4533,59	6716,04	6765,02	7,6	5,55	21516,81	1,31	-48,98
ISR	2382,11	2777,17	3826,34	19,97	45,65	9224,97	7,7	-1049,17
ITA	2400,26	3149,35	3305,48	7,69	837,25	14753,09	1,14	-156,12
JPN	1987,27	2627,59	2107,07	2,64	2940,92	23732,26	3,83	520,52
KOR	434,34	1591,77	1853,23	10,03	193,42	4470,22	9,2	-261,46
LUX	2882,01	23016,7	22267,97	1,48	9,12	23563,56	6,15	748,73
MAR	129,52	238,18	291,77	6,83	23,46	956,44	6,58	-53,59
MEX	160,14	397,21	490,57	23,5	162,39	1907,48	4,02	-93,35
NLD	2438,28	9206,39	8472,55	2,69	249,03	16524,67	2,29	733,84
NOR	4819,47	9464,04	7606,47	2,42	96,13	22556,93	3,14	1857,56
NZL	1836,95	3292,38	2949,82	1,22	35,82	10517,33	-1,2	342,56
PAK	47,17	58,24	51,43	13,05	41,5	358,26	5,46	6,81
PER	71,76	127,37	125,61	350,63	5,84	266,08	6,97	1,76
PHL	52,96	187,7	198,01	16,1	38,51	601,17	-0,21	-10,31
PRT	798,17	1825,49	2392	12,07	49,58	5023,74	2,31	-566,51
SWE	5420,57	6383,52	6210,08	7,63	169,39	19656,52	-1,12	173,45
THA	122,81	513,41	597,71	5,9	77,53	1372,33	8,04	-84,3
USA	3461,48	2090,43	2187,86	3,9	4851,17	19242,57	-1,04	-97,43
ZAF	479,4	812,74	588,02	13,47	85,99	2487,35	-1,01	224,72
MOYENNES	1757,118	3629,746	3512,817	26,7832	366,1697	9946,3	2,4653	116,9302
ÉCARTS-TYPES	1647,854	4498,485	4250,659	78,1236	866,4168	8464,643	3,8018	539,001

## MATRICE DE CORRELATIONS

	CGGV	EXPT	IMPT	INFL	PIBM	HPIB	CPIB
CGGV	1						
EXPT	0,639	1					
IMPT	0,634	0,994	1				
INFL	-0,268	-0,223	-0,226	1			
PIBM	0,204	-0,07	-0,07	-0,076	1		
HPIB	0,92	0,751	0,746	-0,294	0,333	1	
CPIB	-0,426	-0,083	-0,087	0,066	-0,15	-0,344	1



TABLEAU DES DONNEES DE 1992 (W92)

	CGGV	EXPT	IMPT	INFL	PIBM	HPIB	CPIB	BCOM
AUS	2386,4	2821,46	2887,94	1,29	231,02	13207,01	3,25	-66,49
AUT	3167,82	7452,83	7198,73	4,3	139,33	17611,58	1,37	254,1
BEL	2269,36	12457,48	12054,6	3,6	163,65	16291,36	1,69	402,89
BRA	240,51	242,2	136,81	996,47	286,82	1878,72	-1,2	105,39
CAN	3235,37	4822,95	4995,76	1,27	437,27	15320,1	0,81	-172,81
CHE	4140,72	10193,6	9272,12	2,74	186,95	27193,01	-0,13	921,48
CHL	197,96	825,13	816,36	16,21	29,98	2213,23	10,99	8,77
CHN	47,63	56,37	51,67	7,51	405,3	347,91	14,61	4,7
CMR	106,18	199,41	214,74	-1,44	9,77	802,1	-2,96	-15,33
COL	124,01	269,44	219,89	23,4	43,28	1241,15	4,04	49,54
DNK	4991,3	8153,6	6597,29	3,17	107,24	20743,53	0,23	1556,31
DZA	610,24	415,09	293,09	23,15	65,88	2509,2	1,82	122
ESP	1493,49	1879,36	2427,97	6,84	344,77	8838,83	0,71	-548,6
FIN	3934,39	4935,96	4739,52	0,71	87,46	17346,03	-3,55	196,45
FRA	3282,53	4376,36	4122,97	2,17	1011,27	17626	1,1	253,39
GAB	583,16	2015,86	1371,66	0,52	4,66	4573,59	-3,38	644,2
GBR	2632,04	3442,44	3885,35	4,58	723,93	12480,22	-0,53	-442,91
GRC	801,26	1275,23	2123,07	14,49	62,99	6102,83	0,51	-847,84
IDN	53,71	157,58	128,92	5,36	111,71	605,27	7,22	28,66
IND	42,18	28,25	30,55	8,56	336,92	381,87	5,43	-2,3
IRL	1561,71	7760,49	6058,02	2,06	40,65	11454,02	4,6	1702,47
ISL	4441,79	6523	6164,33	3,75	5,37	20549,97	-3,35	358,67
ISR	2322,99	3080,33	4148,83	13,51	48,22	9413,18	5,63	-1068,49
ITA	2423,31	3355,79	3543,42	4,66	841,98	14808,27	0,57	-187,63
JPN	2021,16	2753,01	2087,12	1,78	2970,03	23907,7	0,99	665,89
KOR	463,1	1750,59	1930,36	6,09	203,15	4652,62	5,03	-179,77
LUX	2885,28	23785,81	21790,18	4,28	9,53	24276,28	4,46	1995,63
MAR	137,63	250,23	320,98	3,96	22,62	903,91	-3,59	-70,75
MEX	158,08	409,13	575,71	14,42	168,27	1939,2	3,62	-166,58
NLD	2461,58	9403,66	8585,96	2,23	254,15	16744,4	2,06	817,7
NOR	5047,87	9899,82	7617,22	-0,44	99,28	23162,12	3,28	2282,61
NZL	1867,17	3338,37	3133,31	2,03	36,22	10521,17	1,11	205,06
PAK	42,16	64,4	65,29	10,09	44,75	374,97	7,83	-0,89
PER	72,14	127,84	132,16	63,32	5,74	256,12	-1,76	-4,32
PHL	51,3	190,58	216	7,93	38,64	589,44	0,34	-25,42
PRT	801,38	1901,29	2644	10,61	50,49	5117,43	1,84	-742,71
SWE	5386,92	6495,03	6244,03	1,05	166,98	19263,94	-1,42	251
THA	128,75	577,37	634,58	4,31	83,81	1461,79	8,11	-57,21
USA	3406,7	2200,87	2319,29	2,72	4984,66	19546,86	2,75	-118,42
ZAF	477,96	818,94	608,77	12,86	83,78	2381,63	-2,57	210,17
MOYENNES	1762,481	3767,679	3559,714	32,403	373,713	9965,964	2,039	207,9652
ÉCARTS-TYPES	1648,513	4635,781	4190,31	154,7408	885,7559	8465,518	3,9508	686,6306
MATRICE DE CORRELATIONS								
	CGGV	EXPT	IMPT	INFL	PIBM	HPIB	CPIB	
CGGV	1							
EXPT	0,639	1						
IMPT	0,634	0,993	1					
INFL	-0,176	-0,143	-0,152	1				
PIBM	0,199	-0,07	-0,068	-0,027	1			
HPIB	0,916	0,758	0,752	-0,183	0,335	1		
CPIB	-0,312	-0,081	-0,085	-0,128	0,009	-0,26	1	

TABLEAU DES DONNEES DE 1993 (X93)

	CGGV	EXPT	IMPT	INFL	PIBM	HPIB	CPIB	BCOM
AUS	2422,47	3086,95	3095,86	-1,95	242,45	13727,25	4,95	-8,91
AUT	3222,83	7285,08	7082,86	2,75	140,07	17534,46	0,53	202,22
BEL	2292,39	12637,41	12225,13	3,84	161,43	16008,17	-1,35	412,28
BRA	228,74	263,01	180,08	2073,07	299,75	1934,88	4,51	82,93
CAN	3204,26	5250,21	5358,31	1,06	447,18	15448,2	2,27	-108,1
CHE	4097,36	10250,22	9193,43	2,67	186,05	26816,4	-0,48	1056,79
CHL	201,13	845,52	893,26	12,07	31,85	2312,65	6,24	-47,73
CHN	53,88	60,86	66,66	14,16	461,61	391,72	13,89	-5,8
CMR	83,14	189,55	179,81	1,94	9,46	754,61	-3,14	9,74
COL	125,98	281,09	295,98	24,18	45,65	1285,82	5,48	-14,89
DNK	5122,71	8010,88	6322,81	0,6	108,89	20984,62	1,53	1688,07
DZA	594,25	398,12	267,35	10,45	64,6	2405,88	-1,93	130,76
ESP	1526,32	2035,28	2297,08	4,33	340,69	8717,09	-1,18	-261,8
FIN	3708,05	5733,63	4752,67	2,38	86,43	17060,87	-1,18	980,96
FRA	3380,31	4336,47	3957,3	2,38	998,67	17317,79	-1,25	379,17
GAB	557,26	2212,08	1397,54	1,2	4,77	4559,96	2,25	814,54
GBR	2629,65	3550,11	3991,81	3,1	739,27	12704,17	2,12	-441,7
GRC	835,26	1274,16	2133,56	12,74	63,14	6084,12	0,23	-859,41
IDN	52,91	159,98	132,65	8,92	119,77	638,07	7,22	27,33
IND	44,08	31,77	35,32	9,34	353,47	393,53	4,91	-3,55
IRL	1573,25	8471,66	6403,81	4,25	42,14	11825,61	3,66	2067,85
ISL	4498,28	6884,09	5574,98	2,37	5,41	20519,77	0,89	1309,11
ISR	2371,59	3317,64	4454,62	9	50,9	9675,62	5,56	-1136,98
ITA	2426,19	3672,7	3222,37	4,39	832,25	14588,41	-1,16	450,33
JPN	2063,59	2780,62	2076,57	0,66	2977,51	23908,81	0,25	704,05
KOR	472,93	1931,24	2041,31	5,03	214,94	4878,75	5,8	-110,06
LUX	2949,13	24100,99	22088,54	0,74	10,36	26020,4	8,71	2012,46
MAR	143,62	273,6	311,25	3,64	22,39	877,45	-1	-37,65
MEX	154,54	434,1	575,62	9,77	171,12	1935,73	1,69	-141,52
NLD	2481,88	9484,05	8350,64	1,93	256,1	16761,64	0,77	1133,41
NOR	5125,8	10152,11	7907,83	2,1	102,04	23664,68	2,78	2244,28
NZL	1839,51	3584,61	3367,2	1,51	38,49	11120,51	6,28	217,41
PAK	48,21	63,37	72,84	8,64	45,62	371,3	1,94	-9,47
PER	71,71	129,43	131,27	46,95	6,1	266,93	6,37	-1,84
PHL	53,22	197,81	235,34	6,83	39,46	588,18	2,12	-37,53
PRT	807,27	1897,58	2559,99	5,97	50,65	5125,89	0,31	-662,41
SWE	5365,77	6950,74	6052,45	2,59	163,27	18726,83	-2,22	898,29
THA	133,62	640,32	709,12	3,3	90,8	1563,85	8,34	-68,8
USA	3342,78	2246,97	2507,89	2,61	5107,32	19811,57	2,46	-260,93
ZAF	483,66	843,98	640,55	10,82	85,08	2377,89	1,55	203,43

MOYENNES	1769,738	3898,75	3578,592	58,0583	380,4287	10042,25	2,518	320,1582
----------	----------	---------	----------	---------	----------	----------	-------	----------

ÉCARTS-TYPES	1655,109	4710,03	4214,169	322,7618	901,833	8525,708	3,5575	753,0388
--------------	----------	---------	----------	----------	---------	----------	--------	----------

## MATRICE DE CORRELATIONS

	CGGV	EXPT	IMPT	INFL	PIBM	HPIB	CPIB
CGGV	1						
EXPT	0,651	1					
IMPT	0,628	0,992	1				
INFL	-0,161	-0,133	-0,138	1			
PIBM	0,191	-0,076	-0,067	-0,018	1		
HPIB	0,912	0,776	0,758	-0,165	0,327	1	
CPIB	-0,335	-0,051	-0,044	0,098	-0,076	-0,281	1

TABLEAU DES DONNEES DE 1994 (Y94)

	CGGV	EXPT	IMPT	INFL	PIBM	HPIB	CPIB	BCOM
AUS	2487,83	3162,62	3606,03	2,06	253,17	14185,51	4,42	-443,41
AUT	3286,49	7659,69	7632,57	3,15	143,29	17850,49	2,3	27,12
BEL	2317,83	13754,31	13195,11	2,54	165,21	16332,55	2,34	559,21
BRA	223,29	279,25	204,89	2291,98	317,16	2018,83	5,81	74,36
CAN	3114,71	5955,96	5911,33	0,74	465,38	15907,04	4,07	44,63
CHE	4147,32	10377,78	9841,28	1,65	186,91	26724,55	0,46	536,5
CHL	202,58	900,61	923,86	13,96	33,19	2371,82	4,22	-23,25
CHN	57,47	77,12	72,1	19,16	521,49	437,89	12,97	5,02
CMR	74,66	204,09	167,03	10,93	9,23	715,38	-2,4	37,06
COL	142,57	276,21	361,26	24,76	48,33	1336,92	5,87	-85,05
DNK	5208,07	8704,21	7158,44	1,56	113,5	21806,67	4,24	1545,77
DZA	600,4	375,93	277,28	28,31	63,92	2326,79	-1,06	98,64
ESP	1518,87	2371,28	2553,95	3,97	347,91	8888,3	2,12	-182,67
FIN	3680,54	6465,64	5336,67	1,46	90,23	17731,01	4,4	1128,97
FRA	3401,95	4574,65	4201,74	1,52	1027,13	17731,16	2,85	372,91
GAB	548,08	2255,47	1147,21	47,52	4,91	4581,77	2,98	1108,26
GBR	2670,35	3864,53	4194,93	1,85	768	13151,89	3,89	-330,4
GRC	860,17	1362,68	2209,86	10,14	64,53	6188,98	2,19	-847,18
IDN	53,23	171,67	149,39	7,81	128,76	674,69	7,51	22,28
IND	44,11	34,1	40,75	9,52	380,11	416,06	7,54	-6,65
IRL	1623,18	9602,49	7233,3	1,13	45,23	12666,16	7,33	2369,19
ISL	4625,35	7496,7	5757,7	2,14	5,6	21070,86	3,54	1739
ISR	2294,19	3603,76	4781,77	11,67	54,43	10081,86	6,93	-1178,01
ITA	2422,82	4038,29	3454,27	3,49	849,94	14879,95	2,13	584,02
JPN	2105,73	2898,37	2252,79	0,2	2995,96	23975,13	0,62	645,58
KOR	488,41	2229,71	2460,67	5,44	233,46	5251,91	8,62	-230,96
LUX	2965,61	24799,66	21745,67	5,34	10,79	26730,19	4,2	3053,99
MAR	143,32	278,85	316,32	0,86	24,88	956,29	11,12	-37,48
MEX	157,22	500,7	681,44	8,33	178,58	1984,03	4,36	-180,73
NLD	2471,38	10047,86	8832,51	1,96	264,8	17216,02	3,4	1215,35
NOR	5167,07	10974,93	8248,31	-0,19	107,68	24830,32	5,52	2726,62
NZL	1772,36	3794,83	3742,81	1,47	40,57	11428,43	5,4	52,02
PAK	42,12	63,49	63,17	12,3	47,38	374,86	3,85	0,32
PER	76,79	148,98	164	18,63	6,9	295,82	13,1	-15,03
PHL	55,19	231,54	263,32	10	41,2	600,04	4,4	-31,77
PRT	816,25	2111,89	2832	5,86	51,01	5151,11	0,71	-720,12
SWE	5292,61	7865,11	6799,97	2,45	168,72	19214,72	3,34	1065,13
THA	138,09	725,62	817,6	4,51	98,79	1682,41	8,79	-91,98
USA	3306,81	2426,07	2791,38	2,16	5298,33	20349,08	3,74	-365,31
ZAF	495,82	838,71	731,56	9,44	87,47	2404,84	2,81	107,15
MOYENNES	1777,521	4187,634	3828,906	64,7945	393,602	10313,06	4,5158	358,7275
ÉCARTS-TYPES	1662,821	4956,077	4323,919	356,754	928,6722	8725,095	3,264	901,22
MATRICE DE CORRELATIONS								
	CGGV	EXPT	IMPT	INFL	PIBM	HPIB	CPIB	
CGGV	1							
EXPT	0,666	1						
IMPT	0,655	0,99	1					
INFL	-0,163	-0,136	-0,144	1				
PIBM	0,187	-0,079	-0,066	-0,019	1			
HPIB	0,918	0,784	0,778	-0,166	0,319	1		
CPIB	-0,29	-0,188	-0,205	0,065	-0,129	-0,347	1	

TABLEAU DES DONNEES DE 1995 (Z95)

	CGGV	EXPT	IMPT	INFL	PIBM	HPIB	CPIB	BCOM
AUS	2518,5	3461,12	3755,5	2,59	262,98	14558,8	3,87	-294,38
AUT	3277,02	8136,29	8193,74	2,23	145,41	18070,12	1,48	-57,45
BEL	2334,96	14418,67	13796,32	1,4	168,4	16613,22	1,93	622,35
BRA	225,65	271,56	276,65	72,53	326,58	2051,09	2,97	-5,09
CAN	3053,24	6587,08	6346,5	1,5	476,12	16077,03	2,31	240,59
CHE	4085,33	10447,19	10305,87	1,27	188,37	26752,67	0,78	141,32
CHL	204,15	988,44	1111,98	12,29	36,01	2534,19	8,5	-123,54
CHN	54,95	83,64	74,89	12,84	577,49	479,91	10,74	8,75
CMR	73,18	194,66	161,11	16,82	9,56	719,1	3,48	33,55
COL	147,81	293,48	400,88	20,49	50,89	1382,39	5,3	-107,39
DNK	5212,4	8729,32	7523,96	1,85	116,51	22286,09	2,65	1205,37
DZA	607,31	390,54	276,41	28,28	66,44	2363,73	3,95	114,13
ESP	1536,59	2561,04	2773,79	4,94	357,58	9119,71	2,78	-212,75
FIN	3714,36	6976,35	5652,57	2,45	94,07	18415,41	4,25	1323,78
FRA	3409,71	4827,58	4394,36	1,67	1049,28	18046,57	2,16	433,21
GAB	543,79	2313,96	1149,54	5,85	5,09	4635,3	3,72	1164,41
GBR	2694,38	4127,79	4341,56	2,32	787,11	13430,59	2,49	-213,76
GRC	870,68	1386,83	2339,76	9,27	65,84	6295,58	2,03	-952,93
IDN	53,08	183,34	170,22	9,39	139,32	718,24	8,2	13,13
IND	45,6	43,27	44,86	7,35	407,88	438,88	7,31	-1,59
IRL	1665,26	11191,83	8045,03	0,54	50,08	13965,49	10,73	3146,8
ISL	4650,5	7266,7	5929,78	2,73	5,67	21155,82	1,16	1336,93
ISR	2333,33	3798,96	5035,63	9,57	58,25	10505,04	7,02	-1236,68
ITA	2406	4498,35	3752	4,97	875,17	15299,14	2,97	746,35
JPN	2171,45	3044,28	2564,07	-0,62	3037,8	24217,32	1,4	480,21
KOR	487,53	2731,16	2967,06	5,56	254,43	5654,55	8,98	-235,9
LUX	2989,81	25525,78	22259,86	1,01	11,2	27356,8	3,79	3265,92
MAR	133,43	292,02	351,2	7,44	23,32	879,13	-6,29	-59,18
MEX	144,11	654,29	583,78	37,97	167,5	1828,5	-6,21	70,5
NLD	2474,67	10685,39	9468,02	1,41	270,49	17496,42	2,15	1217,37
NOR	5191,37	11310,14	8657,8	3,31	111,61	25597,97	3,65	2652,34
NZL	1785,9	3812,8	3952,02	2,88	41,81	11639,17	3,05	-139,22
PAK	43,2	59,86	63,87	13,45	49,81	383,43	5,14	-4,01
PER	84,59	156,55	202,37	12,82	7,39	310,08	6,97	-45,83
PHL	56,81	253,49	298,51	7,46	43,16	614,25	4,76	-45,02
PRT	834,08	2361,48	3072,33	5,08	51,95	5233,67	1,86	-710,85
SWE	5208,73	8804,62	7456,02	3,73	174,75	19787,82	3,57	1348,6
THA	136,75	823,46	950,46	6,73	107,92	1816,82	9,24	-127
USA	3258,35	2658,21	3019,21	2,24	5423,87	20631,72	2,37	-361
ZAF	489,57	902,07	839,16	9,16	90,16	2439,54	3,07	62,91
MOYENNES	1780,203	4431,34	4063,967	8,8693	404,6817	10545,03	3,757	367,3738
ÉCARTS-TYPES	1658,957	5156,251	4491,744	12,7513	948,6347	8882,3	3,4928	957,8313

## MATRICE DE CORRELATIONS

	CGGV	EXPT	IMPT	INFL	PIBM	HPIB	CPIB
CGGV	1						
EXPT	0,666	1					
IMPT	0,663	0,99	1				
INFL	-0,461	-0,408	-0,417	1			
PIBM	0,183	-0,077	-0,064	-0,141	1		
HPIB	0,921	0,786	0,787	-0,508	0,311	1	
CPIB	-0,233	-0,087	-0,113	-0,095	-0,108	-0,236	1

Étant donné les différences importantes de dispersion des variables ainsi que l'hétérogénéité de ces dernières, nous avons choisi de travailler sur des données centrées et réduites à l'intérieur de chaque tableau. Nous affecterons le même poids aux quarante individus et chacun des 26 tableaux aura la même importance. Finalement, nos analyses s'effectueront sur des tableaux normalisés.

### 3.1.2 Analyse de l'interstructure

L'analyse de l'interstructure est l'étude des relations entre les différents tableaux. Elle consiste en une comparaison globale de la structure de T tableaux de données en les représentant par T points dans une (ou plusieurs) image(s) euclidienne(s) plane(s).

En ce qui nous concerne on considère 26 tableaux de données centrées et réduites que l'on notera  $X_1, X_2, \dots, X_{26}$ . De plus, nous caractérisons chaque étude  $(X_t, I_8, \frac{1}{40} I_{40})$   $t=1, 2, \dots, 26$  par une matrice de produit scalaires entre individus que l'on définit comme suit :

$$W_t = X_t I_8' X_t$$

En fait,  $W_t$  est la représentation matricielle de l'opérateur de produit scalaire  $\Psi_t$  que l'on a défini au chapitre 2. Par ailleurs, afin d'équilibrer l'influence des différents tableaux dans l'analyse, nous utiliserons les objets normés  $\frac{W_t}{\|W_t\|_{H.S.}}$  pour caractériser chaque étude.

Puisque nous effectuons l'analyse globale des 26 tableaux de données (interstructure), c'est une analyse en composantes principales de la matrice des produits scalaires entre les tableaux qui s'impose. Notons que cette matrice est communément appelée la matrice RV et est définie comme suit :

$$RV(t, t') = \frac{\text{trace}(W_t * W_{t'})}{\|W_t\|_{H.S.} \|W_{t'}\|_{H.S.}}$$

Débutons cette analyse par une interprétation des résultats de l'interstructure non centrée.

### 3.1.2.1 Analyse de l'interstructure non centrée

Le tableau 4 nous présente les coefficients RV entre les différentes années à l'étude. On remarque que les coefficients RV entre les années sont particulièrement élevés, ce qui signifie qu'on a la même structure des pays à l'intérieur des différents tableaux et que, par conséquent, les positions mutuelles des pays évoluent peu d'une année à l'autre.

Tableau 4 : Matrice des coefficients RV

	A70	B71	C72	D73	E74	F75	G76	H77	I78	J79	K80	L81	M82	N83	O84	P85	Q86	R87	S88	T89	U90	V91	W92	X93	Y94	Z95
A70	1																									
B71	0,895	1																								
C72	0,905	0,888	1																							
D73	0,89	0,873	0,926	1																						
E74	0,893	0,885	0,927	0,941	1																					
F75	0,909	0,883	0,941	0,947	0,952	1																				
G76	0,89	0,881	0,927	0,932	0,953	0,942	1																			
H77	0,887	0,887	0,91	0,893	0,914	0,92	0,939	1																		
I78	0,873	0,889	0,885	0,864	0,892	0,894	0,924	0,963	1																	
J79	0,874	0,888	0,88	0,857	0,877	0,875	0,887	0,915	0,943	1																
K80	0,864	0,889	0,878	0,855	0,876	0,868	0,876	0,894	0,915	0,935	1															
L81	0,849	0,883	0,874	0,852	0,875	0,875	0,874	0,891	0,923	0,926	0,936	1														
M82	0,868	0,883	0,883	0,872	0,883	0,892	0,89	0,905	0,922	0,921	0,933	0,937	1													
N83	0,838	0,867	0,851	0,835	0,856	0,852	0,863	0,897	0,929	0,922	0,927	0,926	0,945	1												
O84	0,848	0,874	0,864	0,845	0,877	0,867	0,868	0,875	0,897	0,909	0,928	0,936	0,924	0,91	1											
P85	0,858	0,874	0,866	0,844	0,868	0,862	0,875	0,899	0,924	0,924	0,933	0,934	0,934	0,934	0,944	1										
Q86	0,853	0,876	0,868	0,846	0,862	0,862	0,875	0,9	0,916	0,914	0,912	0,918	0,921	0,926	0,901	0,935	1									
R87	0,854	0,866	0,868	0,85	0,885	0,872	0,888	0,894	0,911	0,903	0,902	0,903	0,905	0,916	0,892	0,911	0,951	1								
S88	0,839	0,856	0,847	0,839	0,858	0,849	0,85	0,854	0,876	0,892	0,894	0,899	0,892	0,915	0,878	0,902	0,92	0,919	1							
T89	0,818	0,829	0,831	0,825	0,846	0,837	0,839	0,836	0,864	0,876	0,869	0,874	0,865	0,889	0,859	0,878	0,885	0,873	0,952	1						
U90	0,828	0,841	0,836	0,828	0,848	0,842	0,844	0,844	0,866	0,878	0,874	0,876	0,867	0,889	0,862	0,88	0,891	0,888	0,957	0,965	1					
V91	0,851	0,872	0,853	0,845	0,867	0,857	0,862	0,859	0,88	0,901	0,901	0,898	0,886	0,898	0,892	0,907	0,923	0,912	0,946	0,922	0,95	1				
W92	0,843	0,86	0,855	0,846	0,864	0,857	0,859	0,86	0,87	0,873	0,889	0,895	0,877	0,885	0,88	0,903	0,908	0,923	0,918	0,876	0,897	0,932	1			
X93	0,838	0,865	0,848	0,841	0,852	0,848	0,849	0,848	0,859	0,873	0,887	0,892	0,874	0,871	0,886	0,894	0,914	0,916	0,906	0,862	0,881	0,93	0,968	1		
Y94	0,836	0,863	0,849	0,839	0,852	0,85	0,848	0,847	0,859	0,876	0,892	0,894	0,879	0,871	0,881	0,895	0,918	0,916	0,907	0,869	0,89	0,931	0,945	0,968	1	
Z95	0,836	0,848	0,853	0,836	0,854	0,85	0,852	0,855	0,864	0,881	0,887	0,887	0,876	0,881	0,88	0,889	0,908	0,925	0,895	0,861	0,879	0,906	0,935	0,938	0,926	1

La similitude entre les tableaux est représentée par l'interstructure. Ainsi, la diagonalisation de la matrice des coefficients RV fournit un système d'axes associé aux 26 valeurs propres du tableaux 5.

Tableau 5 : Valeurs propres de l'interstructure non centrée

Axes	Valeurs propres	% d'inertie	% cumulé	Axes	Valeurs propres	% d'inertie	% cumulé
1	23,151100	89,04	89,04	14	0,064160	0,25	98,23
2	0,679334	2,61	91,66	15	0,058252	0,22	98,45
3	0,384649	1,48	93,13	16	0,054812	0,21	98,66
4	0,297202	1,14	94,28	17	0,048483	0,19	98,85
5	0,183527	0,71	94,98	18	0,047104	0,18	99,03
6	0,160932	0,62	95,6	19	0,043075	0,17	99,2
7	0,112554	0,43	96,04	20	0,039896	0,15	99,35
8	0,103513	0,4	96,43	21	0,036130	0,14	99,49
9	0,092677	0,36	96,79	22	0,034751	0,13	99,62
10	0,086401	0,33	97,12	23	0,032705	0,13	99,75
11	0,081502	0,31	97,44	24	0,024963	0,1	99,85
12	0,075416	0,29	97,73	25	0,020670	0,08	99,93
13	0,066807	0,26	97,98	26	0,019396	0,07	100

Les deux premiers axes expliquent 91,66% de l'inertie totale. Ceci est largement suffisant pour conclure qu'une représentation dans le plan des deux premiers axes principaux suffit. Ainsi, on retrouvera dans le tableau 6 qui suit les coordonnées de tous les tableaux sur les deux premiers axes.

Tableau 6 : Coordonnées des tableaux sur les axes principaux (non centrés) 1 et 2

Tableaux	Axe 1	Axe 2	Tableaux	Axe 1	Axe 2
A70	0,9183	0,2044	O84	0,9449	-0,0338
B71	0,9298	0,1124	P85	0,9568	-0,0698
C72	0,9337	0,237	Q86	0,9582	-0,1074
D73	0,9217	0,2654	R87	0,9557	-0,0864
E74	0,9397	0,2329	S88	0,9482	-0,1917
F75	0,9374	0,2624	T89	0,9252	-0,1692
G76	0,9408	0,2424	U90	0,9334	-0,1862
H77	0,9451	0,1861	V91	0,9532	-0,1755
I78	0,954	0,0851	W92	0,9465	-0,162
J79	0,9539	0,0069	X93	0,942	-0,1762
K80	0,9545	-0,03	Y94	0,9417	-0,1746
L81	0,9551	-0,0452	Z95	0,9378	-0,143
M82	0,9554	0,0196	WD (compromis)	1	0
N83	0,9498	-0,0842	*	0	0

D'autre part, lorsque l'on regarde la figure 6 concernant la représentation des 26 tableaux dans le plan des axes 1 et 2 ainsi que le tableau 7 présentant les coefficients de la combinaison linéaire donnant le compromis, on remarque que le compromis est un bon résumé de l'ensemble des tableaux. En effet, les valeurs très similaires des coefficients de la combinaison linéaire donnant le compromis reflètent les valeurs élevées des coefficient RV et le resserrement des faisceaux formés dans l'image euclidienne des années.

*Tableau 7 : Coefficients de la combinaison linéaire caractérisant le compromis*

$$W = \sum_{t=1}^{26} \alpha_t \frac{W_t}{\|W_t\|_{H,S.}}$$

$\alpha_1$	0,03966	$\alpha_{14}$	0,04103
$\alpha_2$	0,04016	$\alpha_{15}$	0,04081
$\alpha_3$	0,04033	$\alpha_{16}$	0,04133
$\alpha_4$	0,03981	$\alpha_{17}$	0,04139
$\alpha_5$	0,04059	$\alpha_{18}$	0,04128
$\alpha_6$	0,04049	$\alpha_{19}$	0,04096
$\alpha_7$	0,04064	$\alpha_{20}$	0,03996
$\alpha_8$	0,04082	$\alpha_{21}$	0,04032
$\alpha_9$	0,04121	$\alpha_{22}$	0,04117
$\alpha_{10}$	0,04120	$\alpha_{23}$	0,04089
$\alpha_{11}$	0,04123	$\alpha_{24}$	0,04069
$\alpha_{12}$	0,04126	$\alpha_{25}$	0,04068
$\alpha_{13}$	0,04127	$\alpha_{26}$	0,04051

Cependant, on note dans la figure 6 un changement de structure avec les années. En effet, la décennie 70 se retrouve regroupée au-dessus du compromis WD, la majeure partie de la décennie 80 se regroupe près du compromis et finalement, la fin de la décennie 80 et la première moitié de la décennie 90 se rassemble en dessous du compromis. En fait, on peut remarquer deux grandes périodes de changement : la première survient entre les années 1977 et 1978 et la seconde entre les années 1987 et 1988. Par contre, de façon générale, nous assistons dans la figure 6 à une évolution naturelle des tableaux avec les années. Ceci s'avère



tout à fait normal étant donné que les variables économiques étudiées sont majoritairement des variables qui tendent à prendre de l'ampleur avec les années. L'analyse de l'infrastructure nous permettra de mettre en évidence les variables responsables de cette évolution et de ces écarts entre les tableaux.

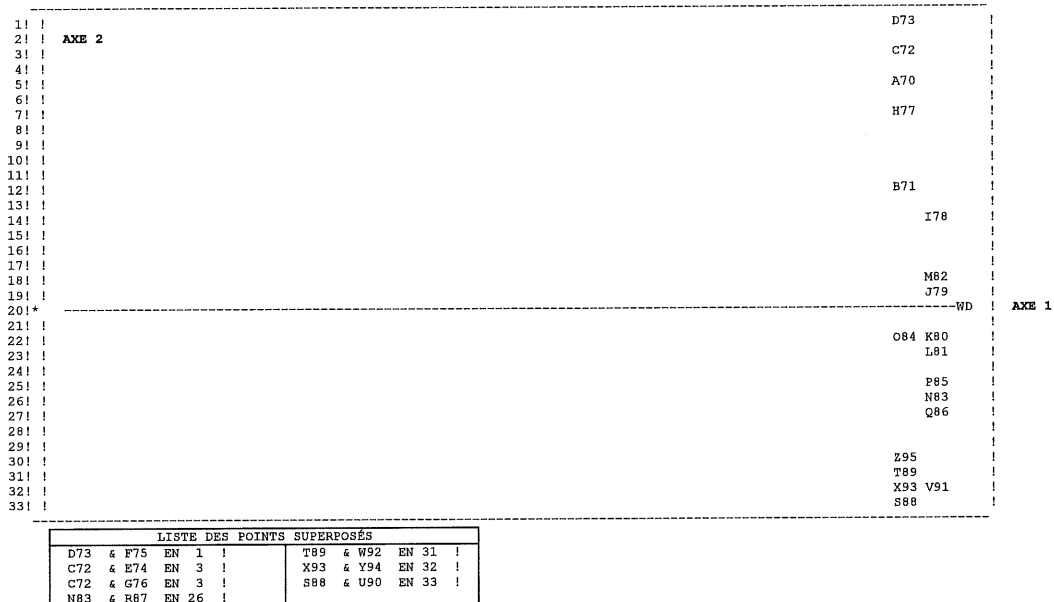


Figure 6 : Représentation des 26 tableaux dans le plan des axes principaux (non centrés) 1 et 2

Enfin, la qualité de la représentation ci-dessus se mesure par la norme des tableaux en projection. Ainsi, le tableau 8 nous montre qu'il y a très peu de différences entre les normes projetées et les normes exactes. Les valeurs des cosinus carrés sont comprises entre 0,887 et 0,947 pour les axes 1 et 2. On en déduit alors que les 26 tableaux sont bien représentés étant donné qu'un cosinus carré élevé signifie que le point représenté est presque dans le plan.

Tableau 8 : *Qualité de la représentation selon les axes principaux (non centrés) 1 et 2*

Tableaux	Norme exacte	Norme projetée	$\cos^2*1000$	Tableaux	Norme exacte	Norme projetée	$\cos^2*1000$
A70	1	0,94	885	N83	1	0,95	909,21
B71	1	0,94	877,11	O84	1	0,95	893,91
C72	1	0,96	928,02	P85	1	0,96	920,31
D73	1	0,96	919,94	Q86	1	0,96	929,64
E74	1	0,97	937,22	R87	1	0,96	920,75
F75	1	0,97	947,48	S88	1	0,97	935,78
G76	1	0,97	943,81	T89	1	0,94	884,64
H77	1	0,96	927,75	U90	1	0,95	905,96
I78	1	0,96	917,27	V91	1	0,97	939,42
J79	1	0,95	910,04	W92	1	0,96	922,19
K80	1	0,95	912,02	X93	1	0,96	918,35
L81	1	0,96	914,28	Y94	1	0,96	917,34
M82	1	0,96	913,15	Z95	1	0,95	899,88

Avant d'analyser plus en profondeur les écarts entre les tableaux, nous allons examiner les résultats produits par l'interstructure centrée.

### 3.1.2.2 Analyse de l'interstructure centrée

L'interstructure centrée a l'avantage de faire apparaître les proximités et les oppositions entre les différents tableaux étudiés.

Tableau 9 : *Valeurs propres de l'interstructure centrée*

Axes	Valeurs propres	% d'inertie	% cumulé	Axes	Valeurs propres	% d'inertie	% cumulé
1	0,67981	23,84	23,84	14	0,05826	2,04	85,89
2	0,38589	13,53	37,37	15	0,05500	1,93	87,82
3	0,29739	10,43	47,79	16	0,04851	1,70	89,52
4	0,18394	6,45	54,24	17	0,04711	1,65	91,17
5	0,16097	5,64	59,89	18	0,04321	1,51	92,69
6	0,11257	3,95	63,83	19	0,03992	1,40	94,09
7	0,10354	3,63	67,46	20	0,03614	1,27	95,35
8	0,09269	3,25	70,71	21	0,03477	1,22	96,57
9	0,08640	3,03	73,74	22	0,03272	1,15	97,72
10	0,08165	2,86	76,60	23	0,02497	0,88	98,59
11	0,07549	2,65	79,25	24	0,02068	0,72	99,32
12	0,06683	2,34	81,59	25	0,01940	0,68	100,00
13	0,06427	2,25	83,85				

En recourant aux trois premiers axes principaux on parvient à expliquer près de 48% de l'inertie totale. Cela demeure quand même suffisant pour conclure à une représentation selon les trois premiers axes. Ainsi, on retrouvera dans le tableau 10 qui suit les coordonnées de tous les tableaux sur les trois premiers axes.

*Tableau 10 : Coordonnées des tableaux sur les axes principaux (centrés) 1, 2 et 3*

<i>Tableaux</i>	<i>Axe 1</i>	<i>Axe 2</i>	<i>Axe 3</i>
<i>A70</i>	0,2045	-0,0719	0,0016
<i>B71</i>	0,1120	0,0009	0,0432
<i>C72</i>	0,2367	-0,0823	0,0050
<i>D73</i>	0,2655	-0,1497	-0,0226
<i>E74</i>	0,2323	-0,1043	-0,0269
<i>F75</i>	0,2619	-0,1034	-0,0197
<i>G76</i>	0,2417	-0,0484	-0,0215
<i>H77</i>	0,1850	0,0919	-0,0070
<i>I78</i>	0,0837	0,1740	-0,0303
<i>J79</i>	0,0056	0,1555	-0,0247
<i>K80</i>	-0,0313	0,1491	0,0351
<i>L81</i>	-0,0466	0,1522	0,0355
<i>M82</i>	0,0182	0,1672	0,0107
<i>N83</i>	-0,0854	0,1908	-0,0542
<i>O84</i>	-0,0348	0,1474	0,0600
<i>P85</i>	-0,0712	0,1600	0,0356
<i>Q86</i>	-0,1087	0,0607	0,0444
<i>R87</i>	-0,0876	-0,0073	0,0710
<i>S88</i>	-0,1923	-0,0701	-0,1622
<i>T89</i>	-0,1691	-0,0738	-0,2892
<i>U90</i>	-0,1863	-0,1089	-0,2456
<i>V91</i>	-0,1762	-0,0983	-0,0649
<i>W92</i>	-0,1626	-0,1428	0,1298
<i>X93</i>	-0,1766	-0,1508	0,1889
<i>Y94</i>	-0,1751	-0,1370	0,1552
<i>Z95</i>	-0,1434	-0,1008	0,1526
<i>WD</i>	0,0000	0,0000	0,0000
<i>*</i>	0,0000	0,0000	0,0000

Comme nous l'avions remarqué précédemment, la figure 7 nous montre de façon plus nette les écarts importants entre les tableaux H77 et I78 ainsi qu'entre les tableaux R87 et S88. Ce graphique nous présente également un changement majeur entre les tableaux G76 et H77.

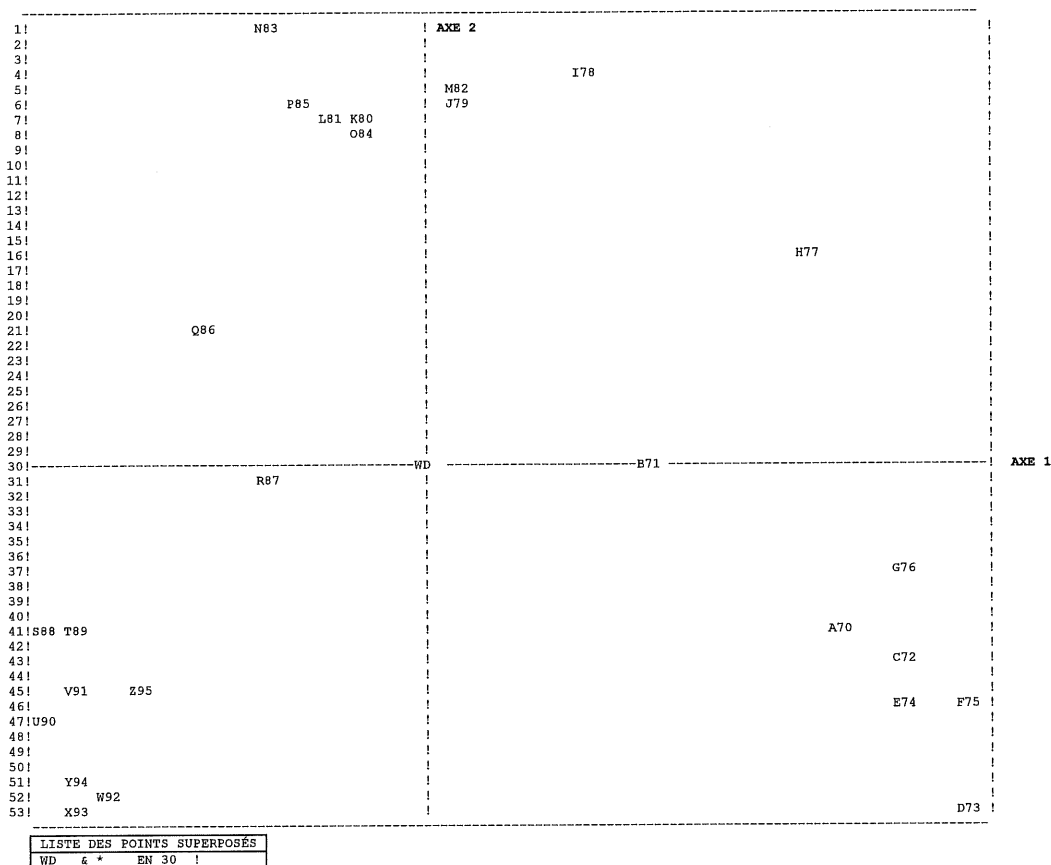
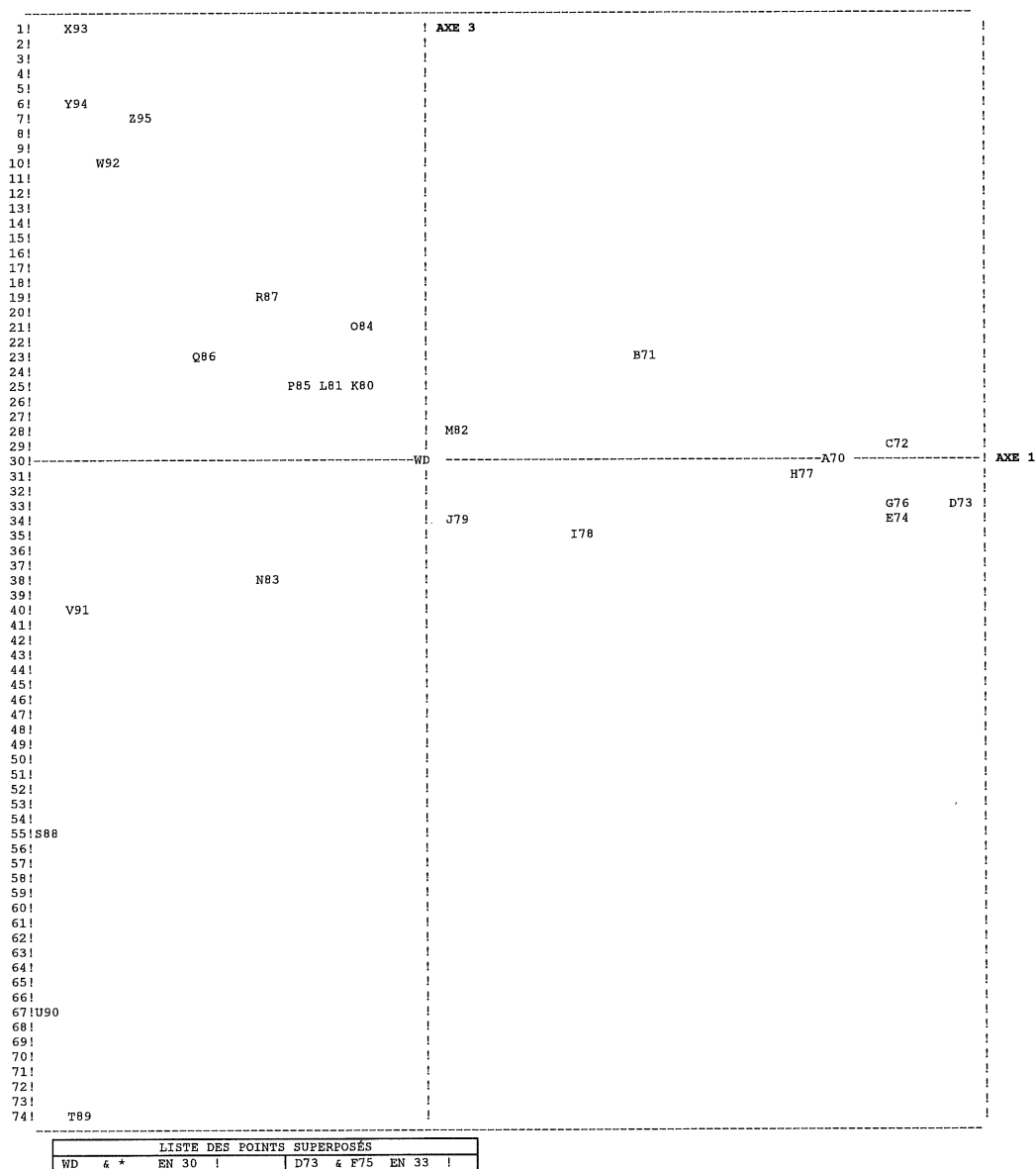


Figure 7 : Représentation des 26 tableaux dans le plan des axes principaux (centrés) 1 et 2

La figure 8, quant à elle, nous fait voir une nouvelle facette de la relation entre les tableaux. Cette dernière met en évidence quelque chose de particulier pour les années 1987 à 1992. En effet, on remarque que, si on suit la chronologie des années, à partir de 1987 les tableaux vont partir du deuxième quadrant et descendre jusque dans le coin inférieur gauche du troisième quadrant pour finalement revenir dans le coin supérieur gauche du second quadrant. Ce changement majeur dans l'évolution de l'économie mondiale semble refléter l'influence qu'a eue la récession nord américaine de 1989 à 1991 sur le plan international. La figure 8 nous permet alors d'identifier les différentes phases de cette récession.



**Figure 8 : Représentation des 26 tableaux dans le plan des axes principaux (centrés) 1 et 3**

Ainsi, nous pouvons constater que les premiers bouleversements de cette récession se sont fait sentir au cours de l'année 1988, autrement dit, avant même que celle-ci soit officiellement déclarée. Les années subséquentes ont donc contribué à l'accroissement continu des répercussions pour finalement atteindre le creux des changements provoqués par la récession

nord américaine en 1989. L'année 1989 a donc été l'année où l'économie mondiale s'est reprise et a entamé son redressement. Il est intéressant de remarquer que cette période correspond exactement à la période où il a été annoncé officiellement que l'Amérique du nord était en récession et donc qu'elle tenterait par tous les moyens de s'en sortir. Nous remarquons alors que dans les années qui ont suivi, nous assistons au redressement de l'économie mondiale et, d'après la figure 8, nous constatons que l'économie mondiale s'est remise de ce bouleversement économique en 1992, soit à la même période où l'Amérique du nord s'est sortie de la récession. Bref, nous pouvons prétendre que la récession qui s'est abattue sur l'Amérique du nord de 1989 à 1991 est un événement marquant dans l'histoire de l'économie mondiale puisqu'elle s'est fait sentir de façon très prononcée dans plusieurs pays en provoquant bon nombre de changements économiques.

Enfin, contrairement aux résultats de l'interstructure non centrée, la qualité de la représentation n'est pas très bonne autant pour le plan des axes 1 et 2 que pour le plan des axes 1 et 3. En effet, comme nous le montre le tableau 11, les valeurs des cosinus carrés varient entre 0,005 et 0,778 pour le plan des axes 1 et 3.

*Tableau 11 : Qualité de la représentation selon les axes principaux (centrés) 1, 2 et 3*

Tableaux	Axes 1 et 2			Axes 1 et 3		
	Norme exacte	Norme projetée	$\cos^2 * 1000$	Norme exacte	Norme projetée	$\cos^2 * 1000$
A70	0,40	0,22	299,71	0,40	0,20	266,78
B71	0,37	0,11	92,69	0,37	0,12	106,46
C72	0,36	0,25	491,35	0,36	0,24	438,52
D73	0,39	0,30	617,97	0,39	0,27	472,36
E74	0,34	0,25	556,50	0,34	0,23	469,36
F75	0,35	0,28	655,99	0,35	0,26	570,74
G76	0,34	0,25	530,10	0,34	0,24	513,70
H77	0,33	0,21	399,53	0,33	0,19	320,85
I78	0,30	0,19	412,69	0,30	0,09	87,68
J79	0,30	0,16	267,86	0,30	0,03	7,09
K80	0,30	0,15	259,81	0,30	0,05	24,77
L81	0,30	0,16	287,09	0,30	0,06	38,89
M82	0,30	0,17	322,86	0,30	0,02	5,10

<i>N83</i>	0,31	0,21	444,23	0,31	0,10	104,02
<i>O84</i>	0,33	0,15	213,40	0,33	0,07	44,72
<i>P85</i>	0,29	0,18	360,19	0,29	0,08	74,44
<i>Q86</i>	0,29	0,12	187,89	0,29	0,12	167,10
<i>R87</i>	0,30	0,09	88,60	0,30	0,11	145,81
<i>S88</i>	0,32	0,20	414,57	0,32	0,25	626,13
<i>T89</i>	0,38	0,18	235,97	0,38	0,34	778,24
<i>U90</i>	0,36	0,22	361,63	0,36	0,31	738,20
<i>V91</i>	0,30	0,20	444,76	0,30	0,19	385,22
<i>W92</i>	0,32	0,22	449,48	0,32	0,21	415,55
<i>X93</i>	0,34	0,23	478,12	0,34	0,26	593,09
<i>Y94</i>	0,34	0,22	436,29	0,34	0,23	483,22
<i>Z95</i>	0,35	0,18	254,54	0,35	0,21	363,26

En bref, cette analyse de l'interstructure ne nous donne qu'un aperçu global et général de l'étude. Afin d'identifier ou d'analyser les causes de ces écarts plus ou moins grands, nous allons faire l'étude de l'intrastructure ainsi que de son compromis.

### 3.1.3 Analyse de l'intrastructure

L'idée essentielle de cette analyse est la recherche d'une structure commune aux tableaux. Cette recherche peut se reformuler ainsi : les distances entre les pays sont-elles stables d'une année à l'autre ?

Le compromis étant déterminé au cours de la section précédente, nous allons représenter les positions-compromis des pays telles qu'elles sont décrites par l'ensemble des tableaux. On obtiendra alors l'image euclidienne compromis. Notons que les positions-compromis des individus correspondent à des positions moyennes des individus sur la période. Bref, ce genre d'analyse nous permettra d'identifier les pays responsables des écarts plus ou moins importants constatés dans l'analyse de l'interstructure.

### 3.1.3.1 Interprétation des axes de l'image euclidienne compromis

L'image euclidienne compromis s'obtient en déterminant les éléments propres de la matrice WD où W est l'objet compromis. Le tableau 12 fournit les dix premières valeurs propres de WD ainsi que l'inertie expliquée par chaque axe. Les trois premiers axes expliquant près de 75% de l'inertie totale, nous nous limiterons à l'examen et l'interprétation de ces derniers.

Tableau 12 : Valeurs propres de l'intrastructure

Axes	Valeurs propres	% d'inertie	% cumulé
1	0,924124	49,86	49,86
2	0,317498	17,13	66,99
3	0,142608	7,69	74,69
4	0,103072	5,56	80,25
5	0,080296	4,33	84,58
6	0,053542	2,89	87,47
7	0,038737	2,09	89,56
8	0,033788	1,82	91,39
9	0,026524	1,43	92,82
10	0,021953	1,18	94,00

L'interprétation des axes est possible grâce à l'examen de leurs corrélations avec les variables initiales. Le tableau 13 nous permet de découvrir quelles sont les variables qui expliquent les axes du compromis. Afin de mettre en évidence les variables explicatives de chaque axe, nous avons doublement souligné les corrélations  $\rho$  telles que  $|\rho| > 0,8$  et souligné les corrélations  $\rho$  telles que  $0,6 < |\rho| < 0,8$ . Notons que pour l'axe numéro 3 nous avons doublement souligné la variable INFL pour chaque tableau (même si les corrélations étaient comprises dans l'intervalle  $[-0,8, 0,8]$ ) puisqu'elle était la variable la plus corrélée.



Tableau 13 : Corrélations des variables avec les 3 premiers axes

Axes				Variables															
	CGGA	EXPA	IMPA	INFA	PIBA	HPIA	CPIA	BCOA	CGGB	EXPB	IMPB	INFB	PIBB	HPIB	CPIB	BCOB			
1	-0,8754	-0,8902	-0,9069	0,0053	-0,1939	-0,9324	0,3543	0,1493	-0,8839	-0,8922	-0,9020	0,1148	-0,1935	-0,9329	0,1567	0,2845			
2	-0,2705	0,3386	0,3279	0,1765	-0,9344	-0,2400	0,0802	0,0371	-0,2507	0,3358	0,3338	0,0422	-0,9350	-0,2344	0,1393	-0,0730			
3	-0,1631	0,0424	0,0073	-0,4353	-0,0048	-0,0590	0,1486	0,1915	-0,1599	0,0453	-0,0016	-0,6404	-0,0060	-0,0682	-0,3689	0,2710			
	CGGC	EXPC	IMPC	INFC	PIBC	HPIC	CPIC	BCOC	CGGD	EXPD	IMPD	INFD	PIBD	HPID	CPID	BCOD			
1	-0,8912	-0,8972	-0,9096	0,1611	-0,1925	-0,9354	0,0210	0,1487	-0,8768	-0,8911	-0,9084	0,1840	-0,1912	-0,9373	0,2109	0,1370			
2	-0,2374	0,3364	0,3260	0,1208	-0,9358	-0,2354	0,0161	0,0633	-0,2124	0,3353	0,3298	0,0957	-0,9366	-0,2379	0,0289	0,0196			
3	-0,1563	0,0403	0,0063	-0,2970	-0,0074	-0,0716	-0,2764	0,2663	-0,1960	0,0478	-0,0075	-0,1892	-0,0085	-0,0667	0,0378	0,3256			
	CGGE	EXPE	IMPE	INFE	PIBE	HPIE	CPIE	BCOE	CGGF	EXPF	IMPF	INFF	PIBF	HPIF	CPIF	BCOF			
1	-0,8790	-0,8810	-0,9034	0,1989	-0,1917	-0,9420	0,2373	0,0306	-0,8769	-0,9033	-0,9005	0,1652	-0,1891	-0,9379	0,4919	0,0991			
2	-0,2037	0,3332	0,3409	0,0908	-0,9368	-0,2161	0,2737	-0,0074	-0,1979	0,3220	0,3433	0,0807	-0,9380	-0,2280	-0,0037	-0,1521			
3	-0,1927	0,0579	-0,0029	-0,1743	-0,0107	-0,0675	-0,0974	0,3347	-0,1974	0,0448	-0,0058	-0,2834	-0,0103	-0,0705	0,1661	0,2586			
	CGGG	EXPG	IMPG	INFG	PIBG	HPIG	CPIG	BCOG	CGGH	EXPH	IMPH	INFH	PIBH	HPIH	CPIH	BCOH			
1	-0,8887	-0,9105	-0,9130	0,2075	-0,1881	-0,9353	0,1403	0,1459	-0,8965	-0,9153	-0,9167	0,3269	-0,1860	-0,9374	0,3169	0,0524			
2	-0,1919	0,3181	0,3271	0,1128	-0,9376	-0,2285	0,0411	-0,0946	-0,1921	0,3155	0,3248	0,1259	-0,9374	-0,2359	-0,0379	-0,0651			
3	-0,1780	0,0388	0,0074	-0,3347	-0,0123	-0,0658	0,0252	0,1627	-0,1550	0,0327	0,0036	-0,5963	-0,0118	-0,0685	0,1678	0,1544			
	CGGI	EXPI	IMPI	INFI	PIBI	HPII	CPII	BCOI	CGGJ	EXPJ	IMPJ	INFJ	PIBJ	HPIJ	CPIJ	BCOJ			
1	-0,8949	-0,9203	-0,9153	0,2374	-0,1836	-0,9403	0,3174	-0,0455	-0,8955	-0,9182	-0,9191	0,3602	-0,1835	-0,9396	0,2932	-0,0748			
2	-0,1859	0,3130	0,3273	0,1427	-0,9376	-0,2434	-0,0201	-0,1084	-0,1816	0,3147	0,3255	0,1632	-0,9384	-0,2414	0,0740	-0,0664			
3	-0,1606	0,0247	0,0086	-0,7796	-0,0106	-0,0715	0,1878	0,1253	-0,1479	0,0275	0,0160	-0,7850	-0,0115	-0,0752	-0,2666	0,1042			
	CGGK	EXPK	IMPK	INFK	PIBK	HPIK	CPIK	BCOK	CGGL	EXPL	IMPL	INFL	PIBL	HPIK	CPIK	BCOL			
1	-0,8889	-0,9244	-0,9158	0,2686	-0,1827	-0,9386	0,3909	-0,0620	-0,8872	-0,9338	-0,9148	0,1742	-0,1811	-0,9347	0,4683	-0,2661			
2	-0,1693	0,3049	0,3336	0,1500	-0,9392	-0,2255	0,2492	-0,3463	-0,1633	0,2908	0,3353	0,1221	-0,9396	-0,2298	0,0385	-0,2778			
3	-0,1683	0,0242	0,0222	-0,7907	-0,0127	-0,0811	-0,1687	0,0220	-0,1726	0,0159	0,0148	-0,8551	-0,0097	-0,0827	0,1911	0,0105			
	CGGM	EXPM	IMPM	INFM	PIBM	HPIM	CPIM	BCOM	CGGN	EXPN	IMPN	INFN	PIBN	HPIN	CPIN	BCON			
1	-0,8888	-0,9336	-0,9177	0,1736	-0,1808	-0,9366	0,2135	-0,1736	-0,8926	-0,9332	-0,9196	0,2329	-0,1801	-0,9386	0,0102	-0,4058			
2	-0,1666	0,2967	0,3319	0,1531	-0,9404	-0,2222	0,0889	-0,2386	-0,1669	0,3040	0,3257	0,1529	-0,9406	-0,2256	-0,0922	-0,0483			
3	-0,1643	0,0250	0,0130	-0,8349	-0,0075	-0,0814	0,3609	0,0890	-0,1542	0,0239	0,0248	-0,8638	-0,0040	-0,0752	0,5620	0,0019			
	CGGO	EXPO	IMPO	INFO	PIBO	HPIO	CPIO	BCOO	CGGP	EXPP	IMPP	INFP	PIBP	HPIP	CPIP	BCOP			
1	-0,8918	-0,9238	-0,9161	0,1710	-0,1780	-0,9409	0,1492	-0,4997	-0,8906	-0,9184	-0,9169	0,2376	-0,1763	-0,9397	0,1936	-0,5109			
2	-0,1691	0,3149	0,3194	0,1103	-0,9401	-0,2274	0,0078	0,1124	-0,1702	0,3208	0,3185	0,1274	-0,9402	-0,2283	-0,0301	0,1931			
3	-0,1541	0,0361	0,0338	-0,7333	-0,0041	-0,0722	0,1377	0,0362	-0,1595	0,0341	0,0341	-0,8503	-0,0043	-0,0733	-0,0124	0,0181			
	CGGQ	EXPQ	IMPO	INFQ	PIBQ	HPIQ	CPIQ	BCOQ	CGGR	EXPR	IMPR	INFR	PIBR	HPIR	CPIR	BCOR			
1	-0,8950	-0,9155	-0,9193	0,3120	-0,1751	-0,9433	0,1894	-0,3276	-0,8923	-0,9130	-0,9167	0,3318	-0,1734	-0,9403	0,1554	-0,1977			
2	-0,1758	0,3255	0,3146	0,1069	-0,9402	-0,2195	0,1425	0,2225	-0,1711	0,3274	0,3163	0,0889	-0,9404	-0,2216	-0,0160	0,2324			
3	-0,1507	0,0337	0,0296	-0,8340	-0,0051	-0,0758	-0,1529	0,0489	-0,1683	0,0344	0,0164	-0,7253	-0,0037	-0,0823	-0,1049	0,2416			
	CGGS	EXPS	IMPS	INFS	PIBS	HPIS	CPIS	BCOS	CGGT	EXPT	IMPT	INFT	PIBT	HPIT	CPIT	BCOT			
1	-0,8959	-0,9034	-0,9128	0,2963	-0,1719	-0,9451	0,0717	-0,3836	-0,8987	-0,8993	-0,9087	0,2464	-0,1709	-0,9489	0,0267	-0,4662			
2	-0,1714	0,3285	0,3146	0,0833	-0,9405	-0,2209	0,0167	0,3264	-0,1720	0,3278	0,3116	0,0816	-0,9405	-0,2148	0,0861	0,3569			
3	-0,1628	0,0519	0,0368	-0,7692	0,0004	-0,0692	0,5494	0,1903	-0,1531	0,0584	0,0581	-0,6280	0,0019	-0,0580	0,4852	0,0382			
	CGGU	EXPU	IMPU	INFU	PIBU	HPIU	CPIU	BCOU	CGGV	EXPV	IMPV	INFU	PIBU	HPIU	CPIU	BCOV			
1	-0,8986	-0,9010	-0,9038	0,2429	-0,1702	-0,9483	0,0744	-0,5012	-0,8996	-0,8911	-0,8873	0,3133	-0,1679	-0,9510	0,3071	-0,4395			
2	-0,1692	0,3235	0,3122	0,0805	-0,9400	-0,2143	0,0571	0,2871	-0,1629	0,3243	0,3254	0,0844	-0,9391	-0,2047	0,2475	0,1404			
3	-0,1512	0,0636	0,0613	-0,6157	0,0063	-0,0533	0,4326	0,0573	-0,1462	0,0758	0,0644	-0,7493	0,0092	-0,0480	0,0593	0,1250			
	CGGW	EXPW	IMPW	INFW	PIBW	HPIW	CPIW	BCOW	CGGX	EXPX	IMPX	INFX	PIBX	HPIW	CPIW	BCOX			
1	-0,9002	-0,8881	-0,8862	0,2111	-0,1651	-0,9524	0,2479	-0,5874	-0,9017	-0,8908	-0,8795	0,1944	-0,1616	-0,9561	0,2523	-0,6498			
2	-0,1606	0,3234	0,3209	0,0450	-0,9390	-0,2054	0,0575	0,2250	-0,1545	0,3240	0,3201	0,0389	-0,9388	-0,1951	0,1866	0,2355			
3	-0,1409	0,0780	0,0666	-0,6645	0,0118	-0,0419	0,2532	0,1201	-0,1409	0,0751	0,0687	-0,6471	0,0126	-0,0391	-0,0230	0,0854			
	CGGY	EXPY	IMPY	INFY	PIBY	HPIY	CPIY	BCOY	CGGZ	EXPZ	IMPZ	INFZ	PIBZ	HPIZ	CPIZ	BCOZ			
1	-0,9025	-0,8947	-0,8923	0,1942	-0,1591	-0,9574	0,3282	-0,6389	-0,9031	-0,8898	-0,8944	0,5054	-0,1569	-0,9575	0,2421	-0,5954			
2	-0,1507	0,3202	0,3069	0,0402	-0,9389	-0,1910	0,1534	0,2882	-0,1481	0,3142	0,3002	0,1116	-0,9388	-0,1864	0,1366	0,2838			
3	-0,1383	0,0715	0,0637	-0,6389	0,0131	-0,0409	-0,1125	0,0872	-0,1391	0,0779	0,0637	-0,5417	0,0152	-0,0397	0,0770	0,1207			

Notons par ailleurs que la représentation graphique de ces corrélations s'avère tout aussi intéressante puisqu'elle nous donne un aperçu global du phénomène des corrélations axes-variables. Puisque nous avons décidé de considérer uniquement les trois premiers axes, les

figures 9 et 10 nous exposent, respectivement, les représentations graphiques des corrélations des variables avec les axes 1 et 2 du compromis ainsi qu'avec les axes 1 et 3 du compromis.

Débutons avec l'interprétation de l'axe numéro un, qui explique près de 50% de l'inertie totale. Après une simple observation du graphique des corrélations, on remarque que ce sont les variables CGGV, EXPT, IMPT et HPIB qui expliquent majoritairement l'axe 1. Toutes ces variables possèdent de fortes corrélations négatives avec cet axe. Par contre, le tableau des corrélations nous affirme que c'est la variable HPIB qui s'avère expliquer de façon la plus imposante ce premier axe. Ainsi, nous pouvons interpréter l'axe 1 comme étant un axe mesurant le niveau d'activité économique d'un pays par habitant. Donc, plus un pays possède une grande activité économique par habitant, plus il devrait se projeter du côté négatif de l'axe 1.

Considérons maintenant l'axe deux, qui explique 17% environ de l'inertie totale. En ce qui concerne cet axe, que l'on regarde le tableau ou le graphique des corrélations, on ne peut faire autrement que de constater que c'est la variable PIBM qui explique pratiquement toute l'inertie de l'axe 2. En effet, toutes les corrélations de cette variable sont négatives et plus petites ou égales à -0,9344. Ainsi, il ne fait aucun doute que l'axe 2 s'interprète comme un axe qui distingue les pays ayant un petit PIB de ceux ayant un PIB gigantesque. Donc, plus un pays possède un gros PIB, plus ce pays se situera du côté négatif du second axe.

Terminons avec l'interprétation de l'axe trois, qui explique quant à lui près de 8% de l'inertie totale. Bien qu'elle ne franchisse qu'à l'occasion le seuil de corrélation que nous avons fixé à -0,6, c'est la variable INFL qui nous semble expliquer le plus adéquatement l'axe 3. De plus, la figure 10 confirme cette impression en nous présentant l'ensemble des variables INFL regroupées près du troisième axe. Ainsi, l'axe 3 nous permet de distinguer les pays très inflationnistes de ceux qui le sont moins ou même déflationnistes. Donc, plus un pays a des tendances inflationnistes, plus il se retrouvera du côté négatif de l'axe 3.



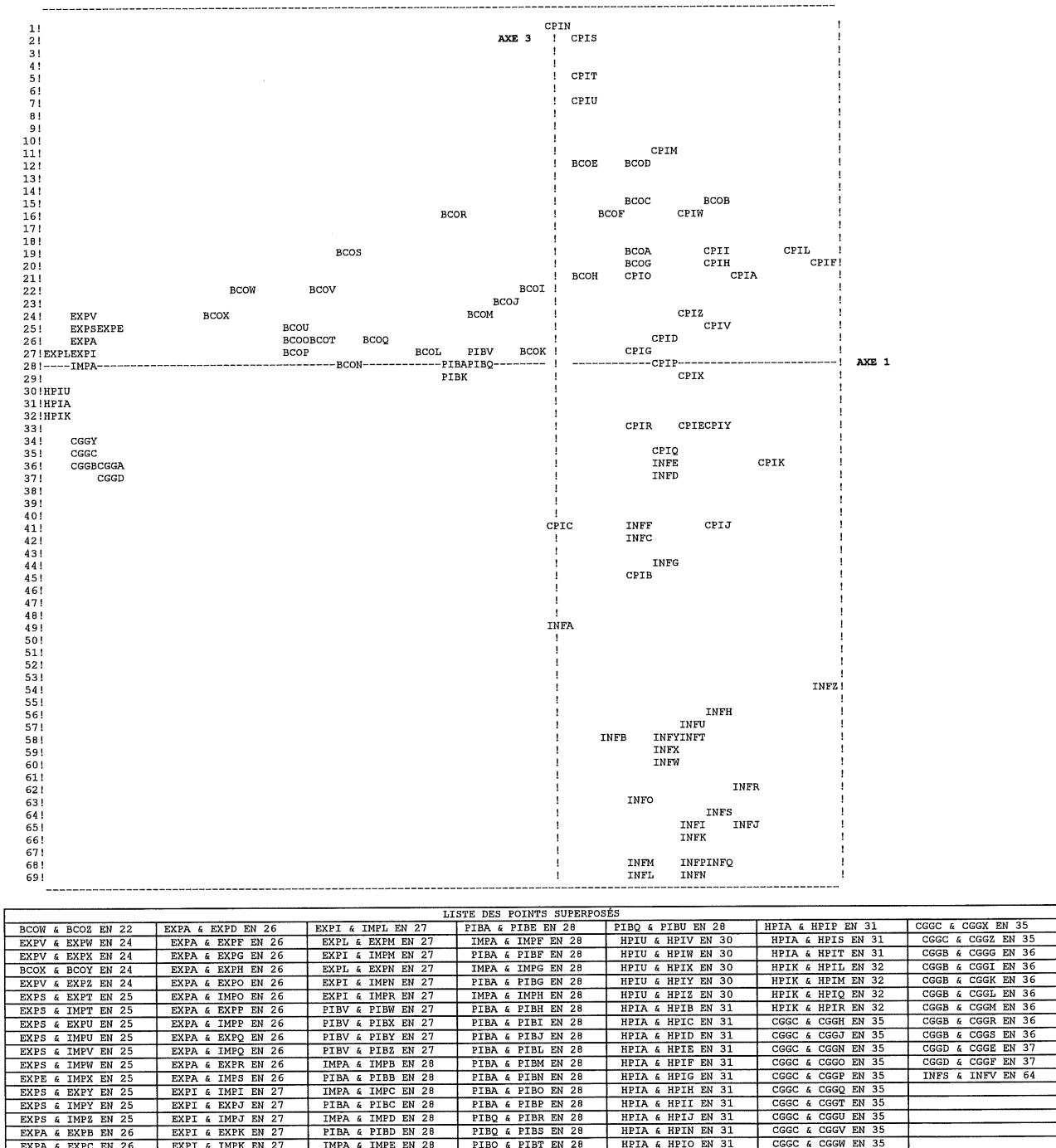


Figure 10 : Graphique des corrélations des variables avec les axes 1 et 3 du compromis

Enfin, avant de passer à la représentation des individus actifs compromis, résumons en quelques mots la signification de chacun des axes de l'image euclidienne compromis. Nous sommes arrivés à la conclusion que l'axe 1 représente le niveau d'activité économique d'un pays par habitant, l'axe 2 représente la taille du PIB d'un pays et finalement, le troisième axe s'identifie au caractère inflationniste de celui-ci.

### 3.1.3.2 Représentation des positions-compromis des individus

Nous nous intéressons maintenant aux individus par rapport aux axes du compromis. Le compromis étant centré pour les poids des individus, l'image euclidienne compromis l'est aussi. Il est donc possible d'interpréter les positions-compromis des individus par rapport à un axe quelconque. Le tableau 14 qui suit nous indique les contributions absolues, les cosinus carrés ainsi que les coordonnées des individus-compromis par rapport aux trois premiers axes.

Tableau 14 : : *Contributions absolues, cosinus carrés et coordonnées des individus-compromis selon les axes 1, 2 et 3*

Pays	Contributions absolues			Cosinus carrés			Coordonnées		
	Axe 1	Axe 2	Axe 3	Axe 1	Axe 2	Axe 3	Axe 1	Axe 2	Axe 3
AUS	0,0006	0,0008	0,0006	0,0926	0,0450	0,0163	-0,1429	-0,0997	0,0599
AUT	0,0172	0,0010	0,0009	0,8298	0,0172	0,0064	-0,7969	0,1147	0,0698
BEL	0,0421	0,0201	0,0061	0,7407	0,1217	0,0166	-1,2469	0,5054	0,1868
BRA	0,0323	0,0012	0,3985	0,2698	0,0035	0,5130	1,0933	0,1250	-1,5077
CAN	0,0094	0,0022	0,0000	0,6322	0,0506	0,0004	-0,5895	-0,1668	0,0157
CHE	0,0884	0,0022	0,0001	0,9190	0,0080	0,0002	-1,8076	0,1686	-0,0261
CHL	0,0237	0,0050	0,0248	0,2281	0,0165	0,0367	0,9364	0,2516	-0,3758
CHN	0,0300	0,0001	0,0382	0,5097	0,0005	0,1002	1,0534	0,0322	0,4669
CMR	0,0235	0,0007	0,0117	0,5009	0,0050	0,0383	0,9327	0,0933	0,2579
COL	0,0244	0,0014	0,0004	0,9240	0,0188	0,0021	0,9493	0,1354	0,0451
DNK	0,0488	0,0001	0,0034	0,8182	0,0007	0,0088	-1,3431	0,0379	-0,1390
DZA	0,0151	0,0003	0,0046	0,4880	0,0029	0,0232	0,7459	0,0575	0,1628
ESP	0,0030	0,0006	0,0020	0,4210	0,0312	0,0439	0,3306	-0,0900	0,1067
FIN	0,0158	0,0001	0,0002	0,6490	0,0010	0,0010	-0,7650	0,0296	-0,0305
FRA	0,0092	0,0197	0,0000	0,5212	0,3837	0,0000	-0,5833	-0,5005	-0,0002
GAB	0,0033	0,0040	0,0062	0,0672	0,0279	0,0194	0,3504	0,2257	0,1883
GBR	0,0028	0,0088	0,0000	0,3121	0,3331	0,0005	-0,3238	-0,3345	0,0133
GRC	0,0070	0,0003	0,0019	0,6088	0,0097	0,0252	0,5097	0,0643	0,1037

<b>IDN</b>	0,0279	0,0015	0,0125	0,7862	0,0145	0,0543	1,0163	0,1380	0,2671
<b>IND</b>	0,0254	0,0000	0,0266	0,6972	0,0003	0,1128	0,9689	-0,0189	0,3898
<b>IRL</b>	0,0008	0,0065	0,0048	0,0929	0,2457	0,0825	-0,1764	0,2868	0,1662
<b>ISL</b>	0,0346	0,0063	0,0391	0,6621	0,0414	0,1155	-1,1307	0,2828	-0,4722
<b>ISR</b>	0,0002	0,0045	0,1381	0,0039	0,0310	0,4302	-0,0842	0,2384	-0,8876
<b>ITA</b>	0,0012	0,0117	0,0000	0,1699	0,5760	0,0002	-0,2094	-0,3856	-0,0079
<b>JPN</b>	0,0034	0,1563	0,0030	0,0520	0,8257	0,0071	-0,3537	-1,4089	0,1310
<b>KOR</b>	0,0166	0,0014	0,0112	0,4872	0,0143	0,0505	0,7845	0,1344	0,2527
<b>LUX</b>	0,1760	0,1176	0,0171	0,6654	0,1528	0,0100	-2,5506	1,2221	0,3124
<b>MAR</b>	0,0227	0,0013	0,0132	0,6313	0,0128	0,0565	0,9165	0,1306	0,2741
<b>MEX</b>	0,0228	0,0006	0,0056	0,6242	0,0057	0,0237	0,9172	0,0879	-0,1788
<b>NLD</b>	0,0273	0,0061	0,0038	0,8455	0,0647	0,0183	-1,0053	0,2780	0,1480
<b>NOR</b>	0,0526	0,0034	0,0010	0,8847	0,0195	0,0026	-1,3949	0,2071	-0,0756
<b>NZL</b>	0,0004	0,0007	0,0001	0,0497	0,0325	0,0019	-0,1146	0,0926	-0,0222
<b>PAK</b>	0,0271	0,0012	0,0222	0,7921	0,0117	0,1003	1,0010	0,1215	0,3562
<b>PER</b>	0,0318	0,0048	0,1488	0,3797	0,0198	0,2737	1,0850	0,2478	-0,9212
<b>PHL</b>	0,0236	0,0011	0,0066	0,6876	0,0106	0,0296	0,9340	0,1158	0,1939
<b>PRT</b>	0,0086	0,0017	0,0020	0,6052	0,0403	0,0214	0,5646	0,1458	0,1062
<b>SWE</b>	0,0479	0,0001	0,0042	0,7763	0,0004	0,0104	-1,3309	-0,0304	-0,1539
<b>THA</b>	0,0244	0,0013	0,0371	0,6547	0,0124	0,1533	0,9500	0,1308	0,4598
<b>USA</b>	0,0157	0,6024	0,0007	0,0667	0,8789	0,0004	-0,7618	-2,7660	-0,0614
<b>ZAF</b>	0,0122	0,0008	0,0028	0,6371	0,0140	0,0223	0,6720	0,0998	0,1258

Commençons par examiner les pays ou groupes de pays qui contribuent le plus à la formation de chacun des axes. En ce qui concerne le premier axe, on constate que c'est le Luxembourg et la Suisse qui contribuent le plus à l'axe numéro 1 avec respectivement 17,60% et 8,84%. En regroupant les pays par continent, on s'aperçoit que c'est l'Europe qui s'avère être celui qui représente le mieux le premier axe avec une contribution de 58,33%. Mentionnons que les pays membres de l'OCDE, quant à eux, obtiennent 62,77% de contribution absolue.

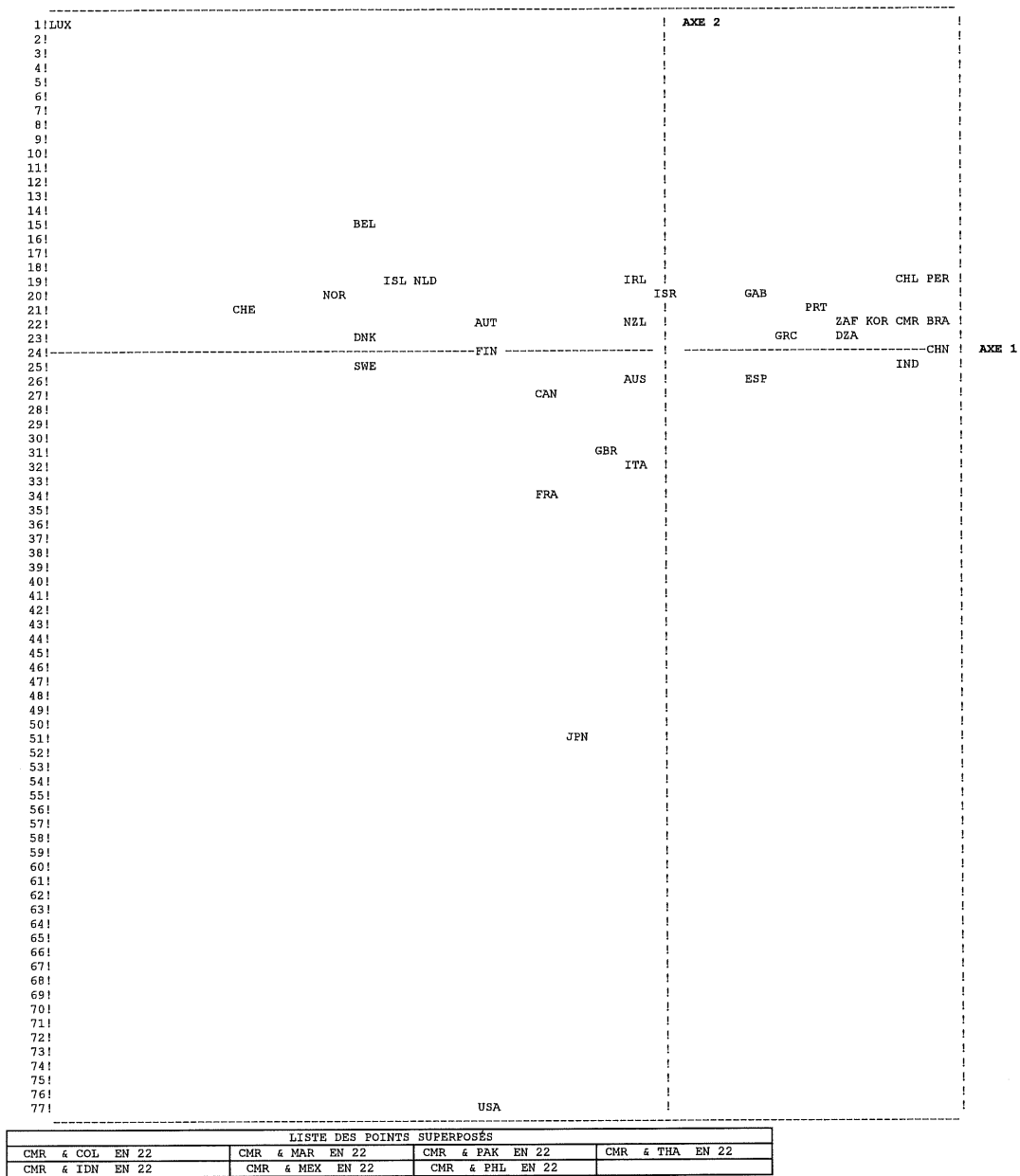
Les résultats du second axe sont beaucoup plus remarquables. En effet, les États-Unis, le Japon et le Luxembourg obtiennent respectivement une contribution à l'axe numéro 2 de 60,24%, 15,63% et 11,76%. De plus, lorsque l'on considère les pays membres de l'OCDE nous obtenons une immense contribution absolue atteignant 97,18%.

Enfin, le troisième axe est, quant à lui, caractérisé par le Brésil, le Pérou et l'Israël puisque leur contribution absolue jumelée s'élève à 68,54%. Cependant, contrairement aux deux

premiers axes, ce sont les pays non membres de l'OCDE qui obtiennent la plus grande contribution absolue avec 87,38%.

Analysons maintenant la représentation des pays par rapport aux axes 1, 2 et 3 de l'image euclidienne compromis. Commençons par effectuer l'analyse selon les deux premiers axes. La figure 11 montre clairement une opposition, selon l'axe 1, entre les pays membres et non membres de l'OCDE. Puisque les pays membres de l'OCDE se projettent du côté négatif du premier axe, cela nous confirme que ce sont des pays qui possèdent une très grande activité économique par habitant. Parmi ces derniers, on remarque la position particulière du Luxembourg. En effet, ce pays se retrouve dans le coin supérieur gauche du second quadrant. Ainsi, on peut affirmer que le Luxembourg est un pays possédant une très grande activité économique par habitant tout en possédant un très petit PIB. Par ailleurs, on retrouve évidemment les deux leaders économiques mondiaux, en l'occurrence les États-Unis et le Japon, à l'extrême négatif de l'axe 2 : l'axe représentant la taille du PIB. Finalement, en élargissant notre vision aux sept pays les plus industrialisés du monde, autrement dit le G7 (Allemagne, Canada, États-Unis, France, Grande-Bretagne, Italie et Japon), on s'aperçoit qu'ils sont tous regroupés, comme nous pouvions le prévoir, du côté négatif du deuxième axe.

Effectuons à présent l'analyse de la représentation des pays par rapport aux axes 1 et 3 de l'image euclidienne compromis. La figure 12 nous apporte les mêmes commentaires que précédemment en ce qui concerne l'axe numéro 1. Cependant, le troisième axe met en évidence trois pays que l'on pourrait caractériser comme étant de nature très inflationniste. Ces pays sont en fait le Brésil, le Pérou et l'Israël puisque tous les trois sont projetés très loin du côté négatif de l'axe numéro 3. De plus, la figure 12 nous permet d'affirmer que les pays (étudiés) d'Amérique du Sud et d'Amérique Centrale sont des pays ayant une faible activité économique par habitant et possédant un énorme taux d'inflation. Cette affirmation vient du fait que ces pays se retrouvent majoritairement dans le quatrième quadrant de l'image euclidienne compromis.



**Figure 11 : Représentation des individus-compromis dans le plan des axes 1 et 2**



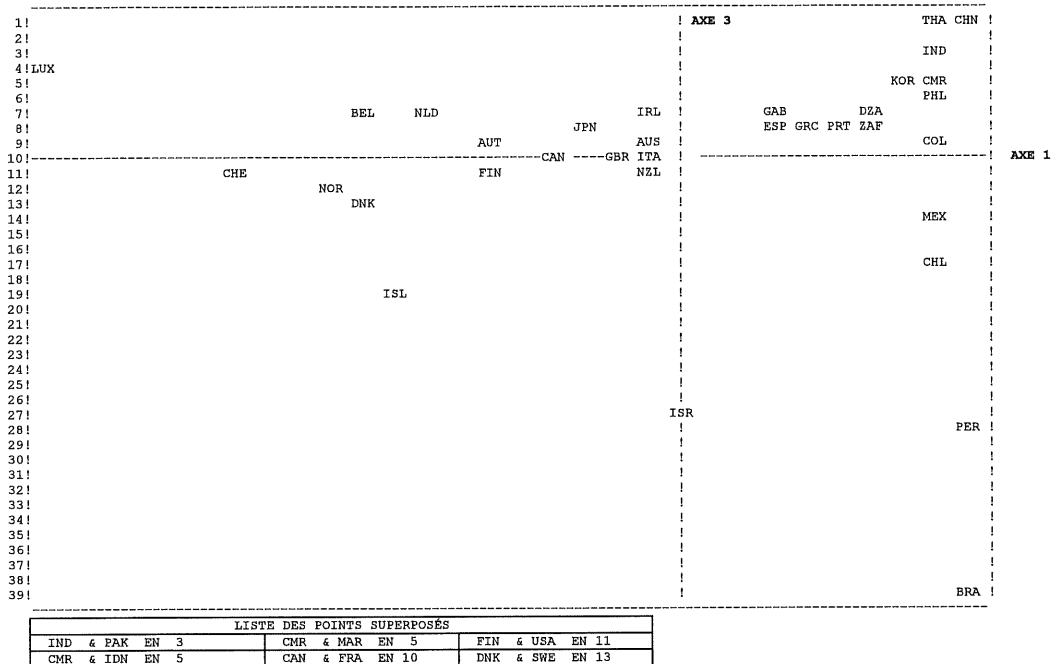


Figure 12 : Représentation des individus-compromis dans le plan des axes 1 et 3

Cela étant dit, c'est ici que se termine cette troisième sous-section consacrée à l'analyse fine des différents tableaux à l'étude que l'on a appelée intrastructure. Nous allons maintenant nous intéresser à l'évolution d'un même pays au fil des années. Cette analyse de l'évolution se fera par l'entremise des trajectoires de chaque pays. C'est en fait l'objet de notre prochaine sous-section.

### 3.1.4 Représentation des trajectoires

L'étude de l'interstructure a mis en évidence, sans les expliquer, les écarts et les ressemblances des objets entre eux et avec le compromis. L'observation des trajectoires va nous permettre d'expliquer ces écarts au niveau individuel.

Comme nous l'avons mentionné dans le second chapitre, la représentation des trajectoires se fait dans l'image euclidienne compromis. Alors, puisque nous sommes en présence des mêmes variables mesurées sur les mêmes individus chaque année, nous sommes portés,

instinctivement, à s'intéresser autant aux trajectoires des individus qu'à celles des variables. Cependant, après avoir effectué l'analyse des trajectoires des variables, nous en sommes venus à la conclusion qu'elles nous apportaient très peu d'informations supplémentaires. En effet, toutes les variables, à l'exception du taux d'inflation annuel et de la croissance annuelle du PIB, avaient une très faible évolution. Tant qu'aux variables concernant le taux d'inflation et la croissance du PIB, elles possédaient des projections similaires à celles des graphiques des corrélations des variables avec les axes du compromis (figure 9 et 10) que nous avons présentés à la section 3.1.3.1 du présent chapitre. C'est pour cette raison que nous allons effectuer uniquement l'interprétation des trajectoires des pays de l'étude.

#### ***3.1.4.1 Représentation des trajectoires des pays***

Les trajectoires des pays s'interprètent par rapport à l'évolution moyenne, c'est-à-dire par rapport à l'évolution d'un individu fictif moyen qui aurait pour valeurs les moyennes des variables par années. Puisque nous avons centré les variables par année, la trajectoire de cet individu moyen est réduite à un point qui est à l'origine du plan étudié. Par ailleurs, l'analyse de l'intrastructure nous a permis d'attribuer une signification à chacun des axes. Il nous est alors possible d'interpréter le sens de parcours d'une trajectoire le long de ces axes.

Étant donné le nombre élevé de pays étudiés, la représentation de toutes les trajectoires provoque inévitablement la superposition de plusieurs d'entre elles et il en résulte une lisibilité quasi inexistante. Pour contrer ce problème nous avons décidé de sélectionner les pays qui, dans un plan ou l'autre, ont eu une évolution très différente de l'évolution moyenne. En fait, nous avons observé sept pays parmi les quarante, pour chacun des plans factoriels, qui méritent une attention particulière. Le tableau 15 nous présente les coordonnées des points de ces trajectoires pour les pays sélectionnés par rapport aux deux premiers axes tandis que la figure 13 nous expose graphiquement les trajectoires associées. Notons que, dans la figure 13, l'étoile près de la lettre représentant le pays correspond à la position compromis du pays en question. La position du compromis est la position du pays représenté précédemment dans la figure 11 de l'intrastructure.

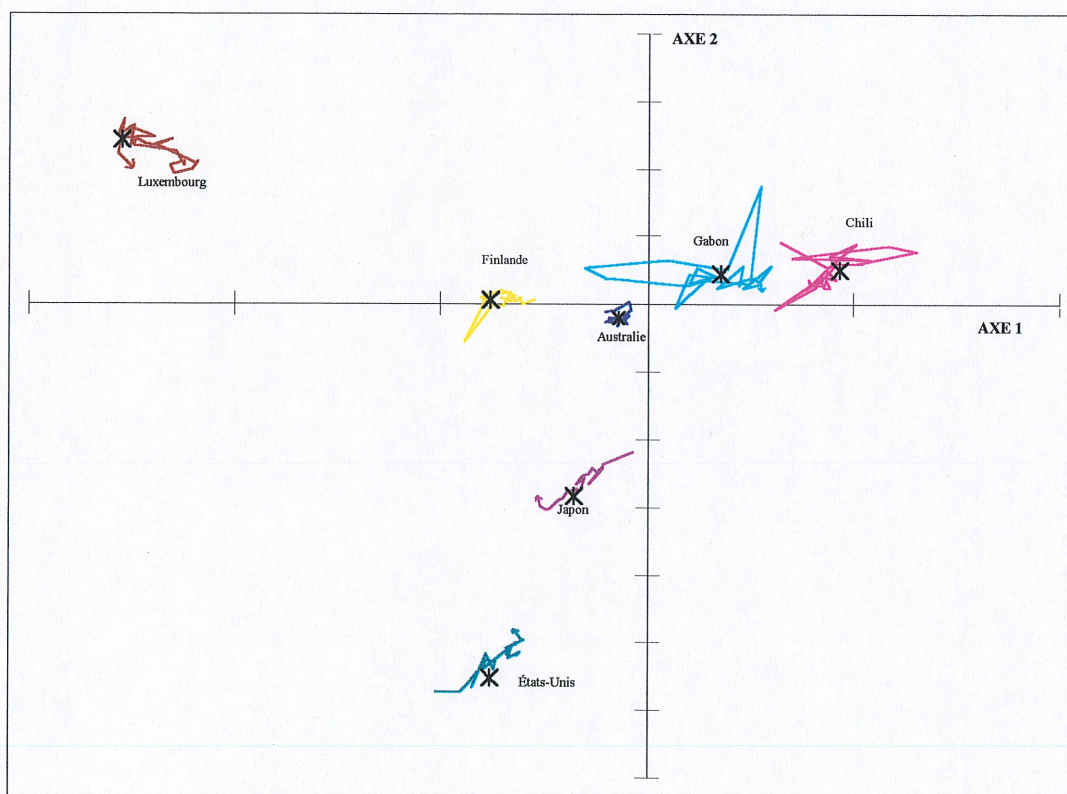
Tableau 15 : Coordonnées des points des trajectoires sur les axes 1 et 2

Pays	AUS		CHL		FIN		GAB		JPN		LUX		USA	
Code	A		B		C		D		E		F		G	
Années	Axe 1	Axe 2	Axe 1	Axe 2	Axe 1	Axe 2	Axe 1	Axe 2	Axe 1	Axe 2	Axe 1	Axe 2	Axe 1	Axe 2
Compromis (*)	-0,1429	-0,0997	0,9364	0,2516	-0,7650	0,0296	0,3504	0,2257	-0,3537	-1,4089	-2,5506	1,2221	-0,7618	-2,7660
1970	-0,2089	-0,1248	0,6448	0,4694	-0,5511	0,0350	0,4386	0,1413	-0,0737	-1,0939	-2,5163	1,2616	-1,0248	-2,8616
1971	-0,1580	-0,0939	0,8719	0,2712	-0,6045	0,0082	0,4594	0,2876	-0,2148	-1,1775	-2,5669	1,2107	-0,9070	-2,8645
1972	-0,1228	-0,0952	1,0082	0,4489	-0,6290	0,0541	0,3332	0,1267	-0,2223	-1,2122	-2,4827	1,2318	-0,8678	-2,8077
1973	-0,1519	-0,0953	0,8879	0,3558	-0,6183	0,0518	0,5027	0,1905	-0,2161	-1,2084	-2,3999	1,2348	-0,8186	-2,7117
1974	-0,1533	-0,1520	1,0766	0,3285	-0,6497	0,0177	0,5511	0,8751	-0,2892	-1,3270	-2,5128	1,2981	-0,8461	-2,8420
1975	-0,1215	-0,0829	0,6999	0,3390	-0,6544	0,0474	0,3795	0,2536	-0,2168	-1,1872	-2,4966	1,1786	-0,7810	-2,5870
1976	-0,1477	-0,0941	1,1637	0,4336	-0,6668	0,0229	0,0945	0,3352	-0,2513	-1,2362	-2,2887	1,1224	-0,7417	-2,7054
1977	-0,1854	-0,0955	1,3035	0,3842	-0,7136	0,0450	-0,3030	0,2662	-0,2685	-1,2034	-2,2555	1,0207	-0,7299	-2,6160
1978	-0,1223	-0,1131	1,0123	0,3069	-0,6871	0,0304	-0,2122	0,2036	-0,2822	-1,2494	-2,2552	1,0466	-0,7362	-2,6435
1979	-0,1854	-0,1345	1,0440	0,3001	-0,6498	0,0585	0,1903	0,1416	-0,3133	-1,2745	-2,3182	1,0230	-0,7765	-2,6269
1980	-0,1293	-0,1252	0,9176	0,2950	-0,7146	0,1094	0,2774	0,1854	-0,3453	-1,3262	-2,2982	0,9621	-0,8037	-2,7071
1981	-0,1109	-0,0845	0,8106	0,1278	-0,7835	0,0642	0,3138	0,2133	-0,3094	-1,2889	-2,2179	0,9971	-0,6564	-2,5215
1982	-0,1252	-0,1283	0,6140	-0,0333	-0,7744	0,0804	0,1937	0,1557	-0,3252	-1,3775	-2,1879	1,0527	-0,6739	-2,6175
1983	-0,0993	-0,1405	0,8390	0,1941	-0,8082	0,0465	0,2324	0,2751	-0,3457	-1,3781	-2,1992	1,0343	-0,6179	-2,5669
1984	-0,1191	-0,0831	0,8596	0,1229	-0,7888	0,0423	0,3422	0,2036	-0,3511	-1,3541	-2,3377	1,1448	-0,6309	-2,5997
1985	-0,1190	-0,0962	0,8842	0,1197	-0,7800	0,0266	0,1942	0,2315	-0,3354	-1,3738	-2,3939	1,1660	-0,6633	-2,5974
1986	-0,1242	-0,1157	0,8619	0,1763	-0,7899	-0,0042	0,1288	-0,0270	-0,3606	-1,3747	-2,3154	1,2159	-0,6849	-2,5770
1987	-0,0971	-0,0883	0,8568	0,1308	-0,7821	0,0280	0,2770	0,1841	-0,3402	-1,3795	-2,4119	1,1670	-0,6664	-2,5575
1988	-0,1227	-0,0729	0,8026	0,1305	-0,7904	0,0312	0,4894	0,1573	-0,3587	-1,3833	-2,4478	1,1895	-0,6532	-2,5239
1989	-0,1120	-0,0795	0,7818	0,1859	-0,7989	0,0414	0,5107	0,1955	-0,3862	-1,3697	-2,4818	1,2219	-0,6381	-2,4940
1990	-0,1035	-0,0899	0,7849	0,1307	-0,8035	-0,0016	0,5332	0,1720	-0,4114	-1,4236	-2,5190	1,1666	-0,6403	-2,5032
1991	-0,1486	-0,1213	0,8662	0,2623	-0,8833	-0,2726	0,5964	0,2831	-0,4329	-1,4451	-2,5002	1,3247	-0,6844	-2,5324
1992	-0,0851	-0,0438	0,9185	0,1871	-0,7483	-0,0026	0,4585	0,1168	-0,4747	-1,4991	-2,5731	1,2402	-0,5998	-2,4732
1993	-0,0933	0,0118	0,8336	0,2080	-0,7069	-0,0094	0,5447	0,1473	-0,4886	-1,5154	-2,5464	1,3615	-0,6074	-2,4748
1994	-0,1562	-0,0448	0,7621	0,1080	-0,6683	0,0950	0,5478	0,1070	-0,5193	-1,4879	-2,5713	1,1127	-0,6130	-2,4675
1995	-0,2069	-0,0601	0,8615	0,2066	-0,7100	0,0831	0,5527	0,1192	-0,5336	-1,4092	-2,5071	1,0127	-0,6449	-2,4008

En observant la figure 13 on constate que, même parmi les trajectoires les plus étendues, l'évolution des pays par rapport à l'activité économique par habitant et à l'ampleur du PIB s'avère très discrète. En effet, que l'on regarde les pays ayant, dès le début des années 70, une très grande activité économique par habitant comme le Luxembourg, un très gros PIB comme les États-Unis et le Japon ou même les pays plus pauvres comme le Chili, tous possèdent une évolution à travers les années des plus constante. Toutefois, avec un bref survol des trajectoires on peut constater quelques changements isolés dans l'évolution de certains pays. Par exemple, on remarque facilement qu'en 1974 (D5) le Gabon a subi une brusque chute de son PIB tandis que la Finlande, qui suivait l'évolution moyenne jusqu'en 1990, a connu une augmentation éphémère de son PIB en 1991 (C22). D'autre part, il est intéressant de



remarquer le parcours des deux leaders économiques mondiaux : les États-Unis et le Japon. En fait, ces deux pays ont une évolution opposée : le Japon tend à augmenter son PIB et son activité économique par habitant tandis que les États-Unis semblent faire tout le contraire. Finalement, mentionnons que la trajectoire très peu étendue de l'Australie et sa proximité de l'individu fictif moyen suggère qu'il pourrait bien être le pays baromètre de l'économie mondiale en ce qui concerne l'évolution du PIB et l'activité économique par habitant.



*Figure 13 : Trajectoires de sept pays dans le plan factoriel 1 et 2*

Lors de l'analyse de l'intrastructure nous avons réussi à décrire les trois premiers axes. Il est alors intéressant d'examiner les trajectoires marquantes sur les axes 1 et 3. Le tableau 16 contient les coordonnées des points des sept trajectoires qui nous semblaient se démarquer des autres tandis que la figure 14 nous présente le graphique de ces dernières.

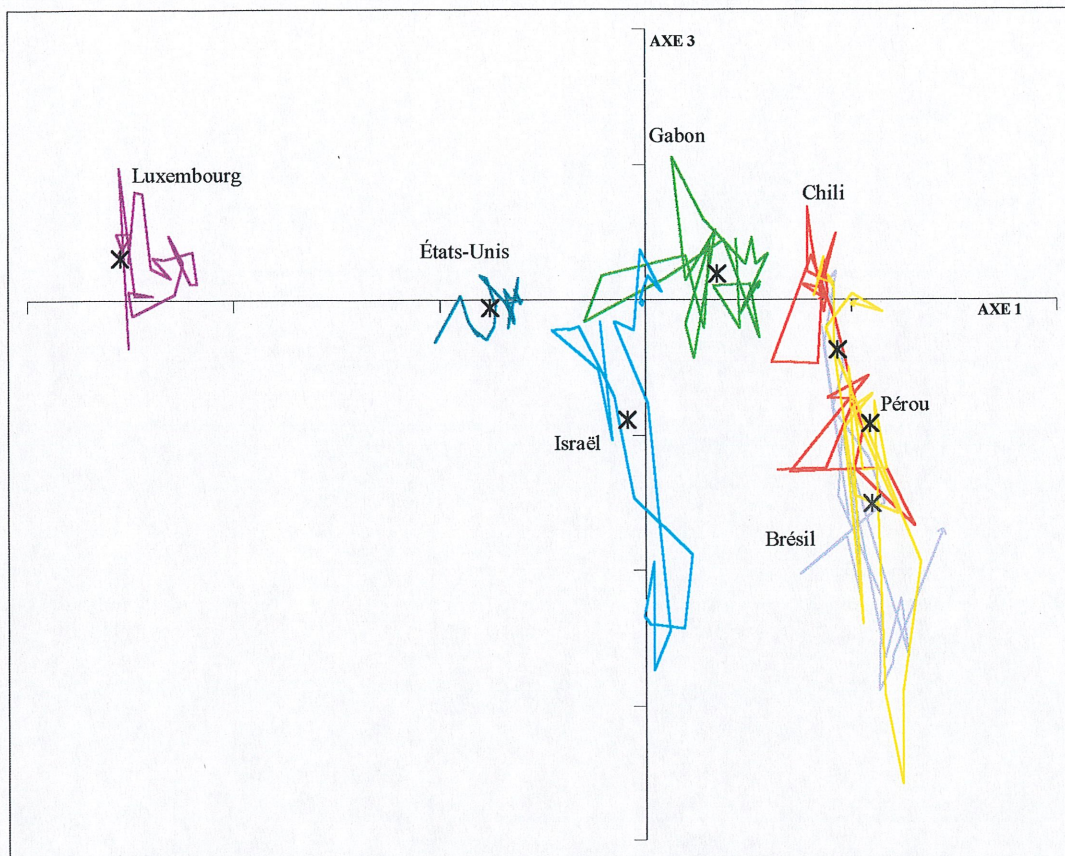


Tableau 16 : Coordonnées des points des trajectoires sur les axes 1 et 3

Pays	BRA		CHL		GAB		ISR		LUX		PER		USA	
Code	A		B		C		D		E		F		G	
Années	Axe 1	Axe 2	Axe 1	Axe 2	Axe 1	Axe 2	Axe 1	Axe 2	Axe 1	Axe 2	Axe 1	Axe 2	Axe 1	Axe 2
<i>Compromis</i> (*)	1,0933	-1,5077	0,9364	-0,3758	0,3504	0,1883	-0,0842	-0,8876	-2,5506	0,3124	1,0850	-0,9212	-0,7618	-0,0614
1970	0,8502	-0,1954	0,6448	-1,2663	0,4386	0,4410	-0,2212	-0,1567	-2,5163	-0,3584	0,8129	0,0310	-1,0248	-0,3183
1971	0,9808	-1,5975	0,8719	-1,2420	0,4594	-0,2037	-0,1691	-1,0401	-2,5669	0,9765	0,8496	0,2198	-0,9070	0,0328
1972	0,8606	-0,3434	1,0082	-0,7431	0,3332	0,0966	-0,2296	-0,5187	-2,4827	0,0309	0,8635	0,3131	-0,8678	-0,1695
1973	0,9181	0,2005	0,8879	-0,7252	0,5027	0,1188	-0,4557	-0,2209	-2,3999	0,0228	0,8321	0,1683	-0,8186	-0,2661
1974	0,8530	0,0860	1,0766	-0,5665	0,5511	-0,2800	-0,3499	-0,2030	-2,5128	0,0666	0,9147	0,1231	-0,8461	-0,2003
1975	0,8604	0,1560	0,6999	-1,2731	0,3795	0,4459	-0,3819	-0,2248	-2,4966	-0,1236	0,8810	0,1777	-0,7810	-0,2914
1976	0,9015	-0,0223	1,1637	-1,2372	0,0945	0,1641	-0,3288	-0,1902	-2,2887	0,0488	0,9079	0,0852	-0,7417	-0,1901
1977	0,9642	-0,4983	1,3035	-1,6735	-0,3030	-0,1590	-0,1506	-0,7163	-2,2555	0,2617	0,9080	-0,3633	-0,7299	-0,0197
1978	0,9051	-0,7931	1,0123	-1,2495	-0,2122	0,1824	-0,0577	-1,4716	-2,2552	0,2782	1,0137	-1,4454	-0,7362	-0,0203
1979	1,0772	-1,1738	1,0440	-0,9752	0,1903	0,3245	0,2255	-1,8764	-2,3182	0,4717	1,2207	-1,5885	-0,7765	0,1638
1980	1,1522	-1,4892	0,9176	-0,1642	0,2774	-0,2117	0,1838	-2,4256	-2,2982	0,4046	0,9960	-0,7986	-0,8037	0,1743
1981	0,7432	-2,0314	0,8106	0,3332	0,3138	0,4287	0,0152	-2,3989	-2,2179	0,1120	1,1005	-0,7030	-0,6564	-0,0660
1982	0,9730	-1,7465	0,6140	-0,4587	0,1937	-0,1809	-0,0122	-2,3334	-2,1879	0,1248	0,9592	-0,9541	-0,6739	-0,2129
1983	1,0400	-2,1958	0,8390	-0,4794	0,2324	-0,4246	0,0425	-1,9414	-2,1992	0,3492	1,0485	-2,3965	-0,6179	0,1666
1984	0,9874	-1,2082	0,8596	0,3076	0,3422	0,5194	0,0382	-2,7403	-2,3377	0,2895	0,9824	-0,4973	-0,6309	0,0129
1985	1,1252	-1,9241	0,8842	0,0662	0,1942	0,1488	0,1134	-2,4391	-2,3939	0,3090	1,0500	-1,2616	-0,6633	0,0209
1986	1,2681	-2,6357	0,8619	-0,0925	0,1288	1,0565	0,0129	-0,7735	-2,3154	0,1675	1,1650	-1,2505	-0,6849	0,0693
1987	1,2322	-2,2074	0,8568	-0,0027	0,2770	0,5951	-0,1561	-0,1679	-2,4119	0,2306	1,1023	-0,7594	-0,6664	-0,0293
1988	1,1522	-2,6468	0,8026	0,4419	0,4894	0,2631	-0,1484	-0,1582	-2,4478	0,7836	1,1553	-2,9141	-0,6532	-0,0777
1989	0,9536	-0,9921	0,7818	0,6775	0,5107	0,4522	-0,0568	-0,2171	-2,4818	0,8063	1,2379	-3,5856	-0,6381	-0,1458
1990	0,9317	-1,4537	0,7849	0,2013	0,5332	0,2650	-0,0290	0,3657	-2,5190	0,2815	1,2436	-2,9056	-0,6403	-0,1827
1991	1,1323	-2,1948	0,8662	0,1451	0,5964	0,3480	0,0781	0,0546	-2,5002	0,4825	1,3341	-1,9459	-0,6844	-0,0249
1992	1,1285	-2,8886	0,9185	0,4830	0,4585	-0,1023	0,0062	0,1747	-2,5731	0,4916	0,8751	-0,2048	-0,5998	0,0004
1993	1,1918	-2,6869	0,8336	0,0940	0,5447	0,1185	-0,0302	0,0199	-2,5464	0,3493	0,9996	0,0439	-0,6074	-0,0303
1994	1,1895	-2,6387	0,7621	0,1156	0,5478	0,0930	-0,0194	-0,0193	-2,5713	0,3301	1,1502	-0,0946	-0,6130	-0,0045
1995	1,4360	-1,7084	0,8615	0,0175	0,5527	0,1137	-0,0176	-0,0034	-2,5071	0,4661	0,9995	-0,0223	-0,6449	0,0774

Contrairement aux trajectoires dans le plan des deux premiers axes, les trajectoires de la figure 14 possèdent une amplitude beaucoup plus prononcée. De plus, on remarque que les pays représentés ont des trajectoires plutôt verticales. Ainsi, cela laisse présager que les pays ayant une trajectoire de grande amplitude seront en fait des pays où l'inflation sera généralement très variable.





*Figure 14 : Trajectoires de sept pays dans le plan factoriel 1 et 3*

Une simple observation de la figure 14 nous permet de constater que ce sont les pays de l'Amérique du Sud qui semblent avoir le plus de difficultés à gérer leur inflation. En fait, le pays ayant l'amplitude de trajectoire la plus prononcée est sans aucun doute le Pérou. Lorsque l'on examine de plus près son évolution on constate que ce pays a connu deux décennie, soit de 1970 à 1989, de hausse du taux d'inflation avant d'atteindre son point culminant en 1990. Ce n'est qu'à partir de 1990 que l'on assiste à une diminution de l'inflation pour ainsi revenir sensiblement à celle de 1970. Le Brésil a, quant à lui, résisté à cette hausse jusqu'en 1976, mais il a vite sombré dans cette période d'inflation élevée sans pour autant réussir à s'en sortir, du moins pas avant 1995. Enfin, le Chili semble être celui qui s'est sorti le mieux de cette vague d'inflation qui planait sur l'Amérique du Sud. En effet, ce dernier n'a pas connu de

hausse continuelle du taux d'inflation. Au contraire, l'évolution de son taux d'inflation s'étale plutôt selon deux plateaux. De 1970 à 1977 le Chili a maintenu un taux d'inflation assez élevé mais relativement stable. Par contre, les années 1978, 1979, 1980 et 1981 ont contribué à l'abaissement significatif du taux d'inflation pour finalement se stabiliser jusqu'en 1995 à un niveau respectable et comparable à celui des autres pays à travers le monde.

Par ailleurs, la figure 14 nous fait prendre conscience qu'il n'y a pas seulement que les pays d'Amérique du Sud qui sont touchés par la volatilité des taux d'inflation, il y a également l'Israël. Ce dernier semble suivre le même parcours que le Brésil. En effet, à partir de 1975 l'augmentation de l'inflation en Israël est remarquable et ce, jusqu'en 1984. Cependant, nous assistons à un revirement exceptionnel à partir de 1984 : le taux d'inflation diminue d'année en année avec la même rapidité avec laquelle il avait augmenté jusque là pour finalement se stabiliser dans les années 90 à un taux moins élevé qu'en 1970.

À l'opposé, on peut remarquer sur la figure 14 des pays comme les États-Unis et le Luxembourg qui possèdent des trajectoires beaucoup moins étendues. Ainsi, à l'exception du début des années 70, ces deux pays possèdent un taux d'inflation très faible et surtout relativement stable.

Enfin, il existe d'autres pays comme le Gabon pour lesquels il nous semble pratiquement impossible de prédire l'inflation d'une année à l'autre puisqu'elle s'avère particulièrement fluctuante. En effet, un simple regard à la trajectoire du Gabon suffit pour nous en convaincre.

Mentionnons en terminant que les autres pays dont nous avons décidé de ne pas représenter la trajectoire dans les figures 13 et 14 ne sont pas dépourvus d'intérêt. Au contraire, il pourrait être très intéressant de les analyser un à un et même d'effectuer une classification de leur trajectoire. Cependant, étant donné que l'objectif de ce mémoire n'est pas d'effectuer une analyse économique en profondeur, nous avons décidé de ne représenter que les pays ayant des trajectoires exceptionnelles.

C'est ainsi que se termine cette première section concernant l'application de la méthode de statistique descriptive STATIS. Cette méthode nous a permis d'analyser de façon globale et plus détaillée l'étude de 40 pays à travers le monde sur le plan économique et ce, sur une période de 26 ans. Le moment est maintenant venu de passer à la deuxième section afin de présenter les résultats d'une analyse basée sur l'extension de l'analyse factorielle d'opérateurs proposée dans la deuxième partie du second chapitre.

### **3.2 Illustration de l'extension de l'analyse factorielle d'opérateurs à l'aide de données sur l'économie mondiale**

La section précédente nous a permis de présenter les résultats d'une analyse sur l'économie mondiale effectuée à l'aide de la méthode d'analyse factorielle d'opérateurs STATIS. Cette analyse s'avère complète en soi. Cependant, en tant que statisticien, nous cherchons toujours une nouvelle façon d'analyser les données afin de découvrir certains éléments qui nous auraient échappé. C'est en fait l'objectif poursuivi par l'extension de l'analyse factorielle d'opérateurs que nous avons proposée dans la seconde partie du deuxième chapitre. Rappelons par contre que cette nouvelle analyse ne se veut en aucun point être une méthode alternative à STATIS. Au contraire, l'extension de l'analyse factorielle d'opérateurs est tout simplement une méthode complémentaire à STATIS nous permettant d'augmenter la quantité d'informations extraites des données à l'étude.

Cela étant dit, l'application que nous proposons dans la présente section est donnée simplement à titre illustratif. Ainsi, il est bien évident qu'il nous aurait été possible, en modifiant certains paramètres comme la variable qualitative de segmentation, d'obtenir des résultats beaucoup plus remarquables que ceux qui vont suivre. Cependant, l'objectif étant uniquement de proposer au lecteur une démarche à suivre afin d'analyser les résultats produits par cette méthode, cet aspect est demeuré secondaire dans notre esprit.



L'extension de l'analyse factorielle d'opérateurs s'effectue, comme nous l'avons présenté au chapitre 2, selon deux phases. Nous avons donc jugé intéressant de préserver cette subdivision afin de décrire l'application qui lui est associée. Ainsi, la première sous-section nous permettra de présenter les données à l'étude, leur structure par rapport à la variable qualitative de segmentation ainsi que les matrices compromises résultantes de la première phase de cette analyse. Par ailleurs, nous utiliserons la deuxième sous-section afin d'interpréter les résultats obtenus lors de l'analyse de l'interstructure tel que nous l'avons décrit à la section 2.2 du second chapitre.

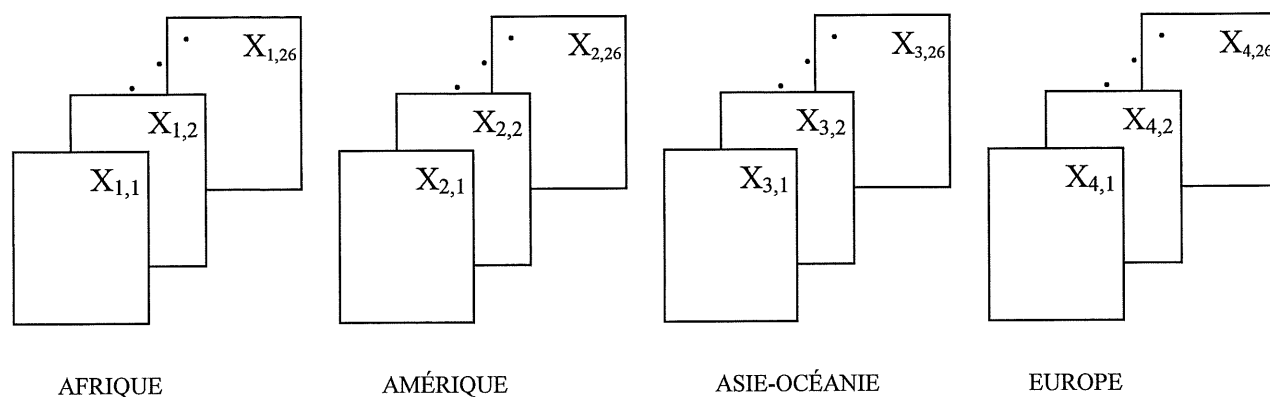
### **3.2.1 Présentation des données, variable qualitative de segmentation et matrices compromises résultantes**

Nous avons mentionné précédemment que l'extension que nous proposons se veut être une méthode complémentaire de la méthode STATIS. Dans la première section de ce chapitre nous avons décrit une application de la méthode STATIS en utilisant des données sur l'économie mondiale. Il est alors naturel d'opter pour ces mêmes données afin de présenter une application de cette extension et ainsi découvrir de nouvelles facettes à l'économie mondiale.

L'étude que nous nous proposons donc d'effectuer, couvre la période de 26 ans débutant en 1970 pour se terminer en 1995. Chaque année formera un tableau de données croisant les mêmes individus et les mêmes variables actives sélectionnées lors de l'analyse comparative de la structure de l'économie de divers pays effectuée précédemment. Le lecteur peut se référer aux tableaux 1, 2 et 3 pour de plus amples informations.

L'extension de l'analyse factorielle d'opérateurs est basée sur la partition des individus selon une variable qualitative à plusieurs modalités. En ce qui nous concerne, nous avons opté pour une variable caractérisant chacun des pays par son continent d'appartenance. Notons qu'étant donné le nombre restreint de pays appartenant à l'Océanie, nous avons décidé de fusionner ces derniers à l'Asie pour ainsi former un seul continent que nous nommerons : Asie-Océanie. Ainsi, l'Afrique est représenté par 5 pays, l'Amérique par 7 pays, l'Asie-Océanie par 11 pays

et finalement, l'Europe est représenté par 17 pays. Nous nous retrouvons alors avec quatre séries de tableaux  $X_{i,1}, X_{i,2}, \dots, X_{i,26}$   $i=1,2,3,4$  chacune contenant les pays associés au continent approprié comme nous le présente la figure 15.



*Figure 15 : Structure des données de l'illustration de l'extension de l'analyse factorielle d'opérateurs*

Les pays étant naturellement différents d'une série à l'autre, il convient d'appliquer la méthode STATIS duale à chacune des séries afin d'obtenir quatre matrices compromises ayant la même structure. Ainsi, l'application intégrale de cette méthode nous permettra d'obtenir une matrice de variance-covariance entre les sept variables et résumant toute l'information contenue dans les 26 tableaux de chacun des continents. À l'intérieur de cette première phase, aucune interprétation n'est nécessaire. En fait, le seul objectif poursuivi est de calculer les matrices compromises correspondant à chacune des modalités de la variable qualitative de segmentation. Le tableau 17 nous présente les quatre matrices compromises résultant de cette première étape.

**Tableau 17 : Matrices compromis résultant de la première phase de l'application de l'extension de l'analyse factorielle d'opérateurs**

<b>Matrices compromis</b>						
<b>Afrique</b>						
0,20306	0,16684	0,16386	0,05766	0,05736	0,18724	0,01471
0,16684	0,20306	0,19969	0,01110	-0,01926	0,19383	0,01784
0,16386	0,19969	0,20306	-0,00068	-0,02898	0,19129	0,01989
0,05766	0,01110	-0,00068	0,20306	0,07334	0,02772	-0,01640
0,05736	-0,01926	-0,02898	0,07334	0,20306	-0,00621	-0,01286
0,18724	0,19383	0,19129	0,02772	-0,00621	0,20306	0,02410
0,01471	0,01784	0,01989	-0,01640	-0,01286	0,02410	0,20306
<b>Amérique</b>						
0,20779	0,17596	0,18335	-0,09423	0,15251	0,20640	-0,04014
0,17596	0,20779	0,20580	-0,08840	0,05538	0,16477	-0,02629
0,18335	0,20580	0,20779	-0,08988	0,06983	0,17330	-0,02779
-0,09423	-0,08840	-0,08988	0,20779	-0,06385	-0,09477	-0,03701
0,15251	0,05538	0,06983	-0,06385	0,20779	0,16537	-0,03682
0,20640	0,16477	0,17330	-0,09477	0,16537	0,20779	-0,03843
-0,04014	-0,02629	-0,02779	-0,03701	-0,03682	-0,03843	0,20779
<b>Asie-Océanie</b>						
0,21593	0,20521	0,20703	0,05210	0,06106	0,18127	-0,07808
0,20521	0,21593	0,20901	0,04207	0,05126	0,18014	-0,07775
0,20703	0,20901	0,21593	0,06761	0,02136	0,15774	-0,06682
0,05210	0,04207	0,06761	0,21593	-0,05790	-0,01740	-0,00078
0,06106	0,05126	0,02136	-0,05790	0,21593	0,14821	-0,03122
0,18127	0,18014	0,15774	-0,01740	0,14821	0,21593	-0,08171
-0,07808	-0,07775	-0,06682	-0,00078	-0,03122	-0,08171	0,21593
<b>Europe</b>						
0,25709	0,09423	0,09131	-0,05827	-0,00953	0,21595	-0,03881
0,09423	0,25709	0,25417	-0,07546	-0,08721	0,16540	0,01698
0,09131	0,25417	0,25709	-0,06984	-0,09421	0,15753	0,01823
-0,05827	-0,07546	-0,06984	0,25709	-0,03128	-0,06921	0,00701
-0,00953	-0,08721	-0,09421	-0,03128	0,25709	-0,01653	-0,03512
0,21595	0,16540	0,15753	-0,06921	-0,01653	0,25709	-0,01967
-0,03881	0,01698	0,01823	0,00701	-0,03512	-0,01967	0,25709

L'objectif de cette première phase ayant été atteint, la prochaine sous-section portera donc sur l'analyse de l'interstructure de ces compromis.

### **3.2.2 Analyse de l'interstructure**

Nous considérons dans cette sous-section l'analyse de l'interstructure comme étant l'étude des relations entre les différentes matrices compromis calculées précédemment. En fait, nous effectuons une comparaison globale de la structure de T matrices de variance-covariance en les représentant par T points dans une (ou plusieurs) image(s) euclidienne(s) plane(s).

En ce qui nous concerne, on considère quatre matrices de variance-covariance représentant les compromis de chacun des continents. Ainsi, contrairement à l'application de la méthode STATIS, ces quatre matrices seront notées  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_3$  et  $V_4$  au lieu de  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$  et  $X_4$ . En fait, de par leur construction, ces matrices correspondent déjà à l'opérateur de covariance  $\Gamma_t$  que l'on a défini au chapitre 2. Par ailleurs, afin d'équilibrer l'influence des différents tableaux dans l'analyse, nous utiliserons une fois de plus les objets normés  $V_i / \|V_i\|_{H.S.}$  pour caractériser chaque étude.

Nous allons débiter cette analyse par une interprétation des résultats de l'interstructure non centrée pour ensuite enchaîner avec celle de l'interstructure centrée. Notons cependant que la façon d'interpréter les résultats qui en découlent est pratiquement la même que lorsque l'on utilise la méthode STATIS. C'est pour cette raison que nous allons abréger au maximum le texte qui va suivre en nous attardant essentiellement aux éléments plus importants de l'analyse.

#### **3.2.2.1 Analyse de l'interstructure non centrée**

Le degré d'association entre les études est mesuré, en pratique, par le coefficient de corrélation vectorielle entre les études, plus communément appelé coefficient RV. Le tableau 18 présente ces coefficients entre chacun des quatre continents. On remarque que les coefficients RV sont

particulièrement élevés, nous pouvons alors en déduire que l'on a la même structure des variables à l'intérieur des différents continents et que, par conséquent, les positions mutuelles des variables évoluent peu d'une année à l'autre.

*Tableau 18 : Matrices des coefficients RV entre les continents*

Continents	Afrique	Amérique	Asie-Océanie	Europe
<i>Afrique</i>	1			
<i>Amérique</i>	0,8328221037	1		
<i>Asie-Océanie</i>	0,8831695993	0,8990550691	1	
<i>Europe</i>	0,8927569290	0,8437932505	0,8114750981	1

La proximité entre les continents est représentée par l'interstructure. Ainsi, la diagonalisation de la matrice des coefficients RV nous fournit un système d'axes associé aux quatre valeurs propres du tableau 19.

*Tableau 19 : Valeurs propres de l'interstructure non centrée de l'extension de l'analyse factorielle d'opérateurs*

Axes	Valeurs propres	% d'inertie	% cumulé
<i>1</i>	3,581684487	89,51	89,51
<i>2</i>	0,2145886681	5,40	94,91
<i>3</i>	0,1436109145	3,59	98,50
<i>4</i>	0,0601159340	1,50	100,00

Les deux premiers axes expliquent près de 95% de la variabilité totale tandis que l'ensemble des trois premiers axes explique 98,50% de la variabilité totale. Puisque nous considérons une étude ayant quatre dimensions, il est amplement suffisant de ne considérer que les deux premiers axes. Ainsi, le tableau 20 nous dresse la liste des coordonnées de tous les continents pour les deux premiers axes principaux.

**Tableau 20 : Coordonnées des continents sur les axes principaux (non centrés) 1 et 2**

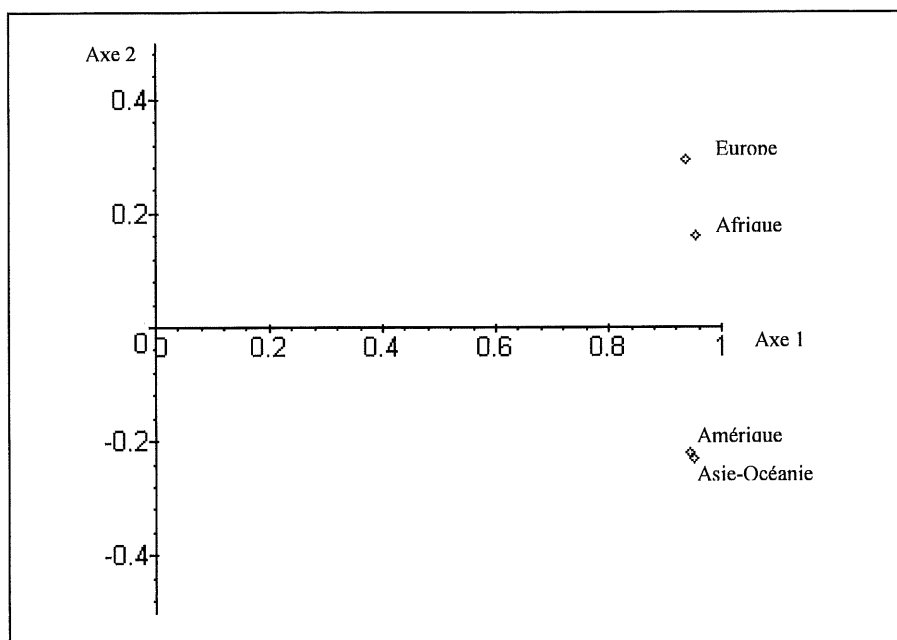
Continents	Axe 1	Axe 2
<i>Afrique</i>	0,9536358732	0,160952718
<i>Amérique</i>	0,9446174661	-0,220157761
<i>Asie-Océanie</i>	0,9497113184	-0,232356472
<i>Europe</i>	0,9370215357	0,293639097

Par ailleurs, lorsque l'on regarde le tableau 21 présentant les coefficients de la combinaison linéaire donnant le compromis des compromis ainsi que la figure 16 concernant la représentation des quatre continents dans le plan des axes 1 et 2, on en déduit que le compromis général est un bon résumé de l'ensemble des tableaux.

**Tableau 21 : Coefficients de la combinaison linéaire caractérisant le compromis des compromis**

$V = \alpha_1 \frac{V_1}{\ V_1\ _{H.S.}} + \alpha_2 \frac{V_2}{\ V_2\ _{H.S.}} + \alpha_3 \frac{V_3}{\ V_3\ _{H.S.}} + \alpha_4 \frac{V_4}{\ V_4\ _{H.S.}}$	
$\alpha_1$	0,2519522727
$\alpha_2$	0,2495695936
$\alpha_3$	0,2509153985
$\alpha_4$	0,2475627352

Nous pouvons remarquer sur la figure 16 que l'Europe et l'Afrique s'opposent clairement à l'Amérique et l'Asie-Océanie par rapport au premier axe. D'autre part, nous constatons sans peine que l'Amérique semble avoir une structure très similaire à l'Asie-Océanie puisque ces derniers possèdent des projections presque superposées.



**Figure 16 : Représentation des quatre continents dans le plan des axes principaux (non centrés) 1 et 2**

Finalement, la qualité de la représentation ci-dessus est excellente puisque les valeurs des cosinus carrés sont élevés et il y a très peu de différences entre les normes projetées et les normes exactes. En effet, le tableau 22 nous présente des valeurs du cosinus carré comprises entre 0,935 et 0,964 ainsi que des normes exactes et projetées pratiquement identiques.

**Tableau 22 : Qualité de la représentation des quatre continents selon les axes principaux (non centrés) 1 et 2**

Continents	Norme exacte	Norme projetée	$\text{Cos}^2 \times 1000$
Afrique	1	0,9671231339	935,3271567
Amérique	1	0,9699338106	940,7715973
Asie-Océanie	1	0,9777224138	955,9411213
Europe	1	0,9819538063	964,2332781

Il ne nous reste maintenant qu'à interpréter les résultats produits par l'interstructure centrée.

### 3.2.2.2 Analyse de l'interstructure centrée

Afin d'avoir une idée plus précise des proximités et oppositions entre les différentes matrices compromis, on effectue une analyse de l'interstructure centrée. Le tableau 23 nous présente les quatre valeurs propres qui découlent de ce type d'analyse.

*Tableau 23 : Valeurs propres de l'interstructure centrée de l'extension de l'analyse factorielle d'opérateurs*

Axes	Valeurs propres	% d'inertie	% cumulé
1	0,2146056271	51,28	51,28
2	0,1437152506	34,34	85,65
3	0,06014309698	14,37	100,00

La représentation de cette étude dans le plan des deux premiers axes nous permet d'expliquer 85,62% de l'inertie totale. En ajoutant le troisième axe nous expliquons alors pratiquement toute l'inertie de l'étude. Cependant, comme nous l'avons mentionné dans l'analyse de l'interstructure non centrée, nous sommes en présence d'une étude comportant seulement quatre dimensions. Ainsi, nous nous contenterons de l'analyse des deux premiers axes principaux. Le tableau 24 nous dresse les coordonnées de tous les continents sur ces deux premiers axes.

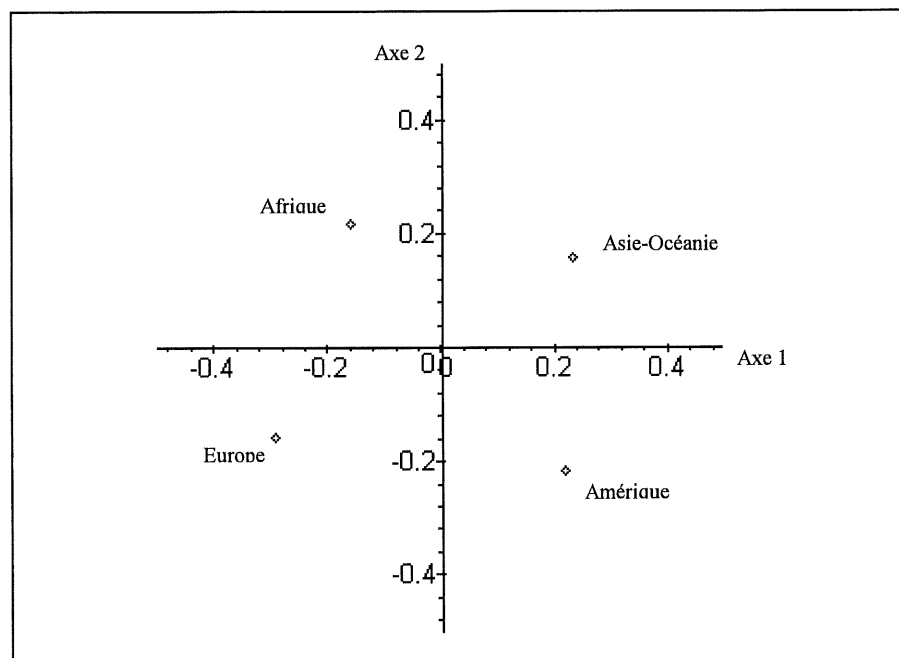
*Tableau 24 : Coordonnées des continents sur les axes principaux (centrés) 1 et 2*

Continents	Axe 1	Axe 2
Afrique	-0,1602449339	0,2171484300
Amérique	0,2205564686	-0,2171832579
Asie-Océanie	0,2329633061	0,1571689993
Europe	-0,2932748379	-0,1571341724

Comme nous l'avons remarqué précédemment, la figure 17 met en évidence les écarts importants entre les structures de l'Afrique et l'Europe par rapport à celles de l'Asie-Océanie



et l'Amérique. De plus, cette figure nous permet de constater une nouvelle facette de la relation entre les continents. En effet, cette dernière affiche une nette opposition entre la structure de l'Europe et celle de l'Asie-Océanie. Une opposition tout aussi importante se dessine entre la structure de l'Afrique et celle de l'Amérique. Finalement, il est intéressant de noter que chacun des quatre continents se projette dans un quadrant différent du plan des deux premiers axes principaux.



*Figure 17 : Représentation des quatre continents dans le plan des axes principaux (centrés) 1 et 2*

Enfin, contrairement aux résultats obtenus lors de l'interstructure non centrée, la qualité de la représentation pour le plan des axes 1 et 2 n'est pas très bonne. En effet, comme nous pouvons le constater dans le tableau 25, les valeurs des cosinus carrés sont comprises entre 0,800 et 0,912 pour le plan des axes 1 et 2.

**Tableau 25 : Qualité de la représentation des quatre continents selon les axes principaux (centrés) 1 et 2**

<i>Continents</i>	<i>Norme exacte</i>	<i>Norme projetée</i>	<i>Cos<sup>2</sup>*1000</i>
<i>Afrique</i>	0,3016781225	0,2698738214	800,2651124
<i>Amérique</i>	0,3279463291	0,3095379191	890,8860721
<i>Asie-Océanie</i>	0,3139014548	0,2810231242	801,4888007
<i>Europe</i>	0,3483839363	0,3327180168	912,0872686

En bref, l'analyse de l'interstructure nous a permis de positionner les continents les uns par rapport aux autres au point de vue économique. Rappelons que cet exemple a été présenté dans l'unique but d'illustrer l'extension de l'analyse factorielle d'opérateurs que nous avons proposée. Naturellement, le choix d'une variable qualitative de segmentation possédant un nombre plus élevé de modalités nous aurait probablement permis d'apprécier davantage cette nouvelle méthode. Cependant, notre objectif était de donner une description la plus juste possible, tant théorique que pratique, de l'idée que nous avons osé approfondir et présenter dans ce mémoire. Nous laissons donc le soin au lecteur d'utiliser diverses variantes possibles afin de rendre cette méthode plus optimale.

## CONCLUSION

Les méthodes d'analyse de données multidimensionnelles se sont énormément développées au cours des trente dernières années et leur efficacité a été largement démontrée. Malheureusement, lorsque l'on consulte les banques de publications récentes, nous sommes forcés d'admettre que le développement de ces techniques stagne depuis le milieu de la décennie 90. Ainsi, dans l'espoir de revitaliser le développement de ces techniques, nous avons proposé à l'intérieur de ce mémoire une nouvelle technique statistique nous permettant d'accroître la quantité d'informations qui est possible d'extraire d'un ensemble de données multidimensionnelles. Étant donné la conception générale de cette nouvelle méthode et le fait que ses fondements reposent essentiellement sur la méthode d'analyse factorielle d'opérateurs STATIS, nous avons opté pour l'appellation : Extension de l'analyse factorielle d'opérateurs.

Ce mémoire nous a donc permis de définir le concept de l'extension de l'analyse factorielle d'opérateurs ainsi que toute la théorie nous permettant de formaliser cette méthode. Afin d'atteindre cet objectif, nous avons dû préalablement définir l'ensemble des outils mathématiques sous-jacents aux méthodes d'analyse de données multidimensionnelles. Une description théorique détaillée de la méthode d'analyse factorielle d'opérateurs STATIS nous a permis de mieux synthétiser l'extension de l'analyse factorielle d'opérateurs et ainsi mettre l'accent sur ses propres particularités. Finalement, puisque la théorie prend tout son sens dans la pratique, le dernier chapitre de ce mémoire nous a permis de concrétiser ces méthodes en les appliquant à une étude de cas sur l'économie mondiale. En plus d'apporter un aspect pratique à ce mémoire, ce dernier chapitre nous a permis de formuler certaines conclusions quant au comportement de certains pays et continents et à leur relation avec le reste du monde par rapport à différentes variables économiques.

D'autre part, mentionnons que les applications de l'analyse factorielle d'opérateurs et de l'extension de l'analyse factorielle d'opérateurs que nous avons proposée ont été présentées

beaucoup plus afin d'illustrer les méthodes qu'à obtenir des interprétations économiques très techniques. En fait, notre objectif en présentant ces applications, était uniquement de proposer au lecteur une démarche à suivre dans l'interprétation des résultats qui en découlaient. Il est donc bien évident que, dans le cas de l'application de l'extension de l'analyse factorielle d'opérateurs, une variable qualitative de segmentation choisie plus judicieusement nous aurait permis d'obtenir des résultats ayant une saveur économique beaucoup plus attrayante.

Enfin, puisque dans ce mémoire nous avons établi et appliqué les fondements théoriques de l'extension de l'analyse factorielle d'opérateurs, il serait intéressant que l'on puisse éventuellement poursuivre son développement afin de la rendre plus optimale. On pourrait donc exiger que la variable qualitative de segmentation ait un nombre plus élevé de modalités. Ainsi, cette contrainte pourrait nous permettre d'effectuer une classification ou même une analyse discriminante sur les différentes projections des tableaux compromis correspondant à chacune des modalités de la variable qualitative de segmentation. Ce développement de l'extension de l'analyse factorielle d'opérateurs nous permettrait alors d'établir clairement de nouvelles relations entre les groupes d'individus à l'étude caractérisés par les modalités de la variable qualitative qui nous intéresse.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] BENOIST-GUEUTAL (P.), COURBAGE (M.), Mathématiques pour la physique – Opérateurs linéaires dans les espaces de Hilbert – Tome 3, (Eyrolles, Paris, 1993).
- [2] BENZÉCRI (J.P.) et collaborateurs, L'analyse des données – Tome 2, (Dunod, Bordas, 1973).
- [3] DAZY (F.), LE BARZIC (J.F.), L'analyse des données évolutives – Méthodes et applications, (Technip, Paris, 1996).
- [4] ESCOPIER (B.), PAGES (J.), Analyses factorielles simples et multiples – Objectifs, méthodes et interprétation, (Dunod, Paris, 1988).
- [5] ESCOUPIER (Y.), Échantillonnage dans une population de variables aléatoires réelles, (Publications de l'ISUP, no X1X (4), pages 1-47, 1970).
- [6] FOUCART (T.), Analyse factorielle de tableaux multiples, (Masson, Paris, 1984).
- [7] HALMOS (P.R.), Introduction to Hilbert space and the theory of spectral multiplicity, (Chelsea, New York, 1957).
- [8] HOULE (M.), Analyse factorielle d'opérateurs et applications à une étude financière, (Mémoire de Maîtrise, Faculté des sciences de l'Université de Sherbrooke, Sherbrooke, 1991) .
- [9] KROONENBERG (P.M.), Three-mode principal component, (DSWO Press, 1983).

- [10] LACHAT (D.P.), Géométrie des opérateurs linéaires, (Dunod, Paris, 1966).
- [11] LAVIT (C.), Analyse conjointe de tableaux quantitatifs, (Masson, Paris, 1988).
- [12] L'HERMIER DES PLANTES (H.), Structuration des tableaux à trois indices de la statistique, (Thèse de 3<sup>e</sup> cycle, Université de Montpellier, 1976).
- [13] QUEYSANNE (M.), Algèbre, (Armand Colin, Paris, 1964).
- [14] RIESZ (F.), SZ.-NAGY (B.), Leçons d'analyse fonctionnelle, (Académie des sciences de Hongrie, Szeged, 1955).
- [15] SAPORTA (G.), Probabilités, analyse des données et statistique, (Technip, Paris, 1990).
- [16] SCHWARTZ (L.), Analyse hilbertienne, (Hermann, Paris, 1979).
- [17] STATIS : Structuration des Tableaux À Trois Indices de la Statistiques (logiciel permettant d'appliquer les méthodes STATIS et STATIS duale), (Centre International de Statistique et d'Informatique Appliquées, Paris, 1989).
- [18] THE WORLD BANK, World Development Indicators 1998, (World Bank Publications, Washington, 1998).